СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

В задачах для самостоятельной работы ссылки на пособие *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Е.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 частях. – М.: Оникс, 2009. Часть 2. Ссылки совпадают для всех изданий, начиная с четвертого (1986 г.)

Занятие 1. **Числовые ряды: общий член ряда, сумма ряда, необходимый признак сходимости.**

Числовым рядом называется бесконечная сумма $u_1+u_2+...+u_n+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ действительных чисел. u_n – **общий** или n-ый член ряда. Ряд считается заданным, если задан его общий член. Основной вопрос: имеет ли бесконечная сумма конечное значение?

Рассмотрим *n-ую частичную сумму* ряда $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. Числовой ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел n-ой частичной суммы:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S.$$

Другими словами, ряд называется **сходящимся**, если **бесконечная сумма имеет конечное значение.** S называется **суммой** ряда. Для сходящегося ряда можно записать:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S.$$

Если предел n-ой частичной суммы бесконечен или не существует, то числовой ряд называется **расходящимся.**

Необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. При его выполнении ряд может как сходиться, так и расходиться. Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд расходится.

Ряд $a+aq+aq^2+....+aq^{n-1}+...$, где $|q|<1$ из членов *убывающей геометрической прогрессии* **сходится** к сумме $S=\dfrac{a}{1-q}$.

Примеры. 1. Записать первые четыре члена ряда с общим членом

$$u_n=\frac{n}{3^n\,(2n+1)}.$$

Решение. Полагая в заданной формуле $n=1,2,3,4$, получаем:

$$u_1=\frac{1}{3^1(2\cdot1+1)}=\frac{1}{9},\ u_2=\frac{2}{3^2(2\cdot2+1)}=\frac{2}{45},\ u_3=\frac{3}{27\cdot7}=\frac{1}{72},\ u_4=\frac{4}{729}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n\,(2n+1)}=\frac{1}{9}+\frac{2}{45}+\frac{1}{72}+\frac{4}{729}+\ldots.$$

2. Найти общий член ряда $\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{8\cdot 9}+\ldots$.

Решение. В числителе – единица, в знаменателе – произведение двух соседствующих четного и нечетного чисел $2n$ и $2n+1$, $n=1,2,3,\ldots$. Знак слагаемых чередуется и описывается формулой $(-1)^{n-1}$. Окончательно,

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n\cdot(2n+1)}.$$

3. Найти общий член ряда $1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\ldots$.

Решение. В числителе – единица, в знаменателе – квадрат номера слагаемого. Знак слагаемых описывается формулой $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $n=0,1,2,3,\ldots$. Тогда

$$u_n=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n+1)^2},\quad n=0,1,2,3,\ldots\ .$$

4. Найти сумму ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots\ .$$

Решение. Члены ряда образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{4}$ и первым членом $a_1=1$. Отсюда

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

5. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Решение. Разложим общий член ряда на простейшие дроби:

$$u_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\,\frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}==\frac{1}{3}\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3n+1}.$$

Найдем частичную сумму ряда:

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$

$$+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\right)\ldots+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}\right)=$$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}$. Для нахождения суммы ряда находим предел:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

5. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots .$$

Решение. Разложим общий член ряда $u_n=\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и отбрасываем их слева и справа:

$$1=A(n^2+3n+2)+B(n^2+2n)+C(n^2+n).$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n слева и справа:

$$\left[\begin{array}{l} n^2: \\ n\ : \\ n^0: \end{array}\right. \begin{cases} 0=A+B+C, \\ 0=3A+2B+C, \\ 1=2A. \end{cases}$$

Находим $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\dfrac{1}{2}$. Таким образом,

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$u_1=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right),\ u_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right),\ u_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right),$$

$$u_4=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right),\ \ldots .$$

и

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$ Таким образом,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}.$$

6. С помощью необходимого признака сходимости изучить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n-1}.$$

Решение. $u_n=\dfrac{n+1}{3n-1}$. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1):n}{(3n-1):n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$ Общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится.

Задачи.

Записать первые четыре члена рядов по заданному общему члену.

1. $u_n=\frac{(-1)^{n-1}(3n+1)}{2n^2+1}$. 2. $u_n=\frac{n+3}{n!}$.

Найти общие члены заданных рядов.

3. $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ldots$. 4. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots$.

Найти суммы заданных рядов.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$. 6. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\ldots$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

Дополнительные задачи.

9. Найти общий член ряда $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\ldots$.

Найти суммы заданных рядов.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{5}+n)(\sqrt{5}+n+1)}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Записать первые четыре члена рядов по заданному общему члену.

12. $u_n=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n2^n+1}$. 13. $u_n=\frac{2n}{(2n)!!}$, $((2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot2n)$.

Найти общие члены заданных рядов.

14. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\ldots$. 15. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

Найти суммы заданных рядов.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 17. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\frac{1}{625}-\ldots$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

Занятие 2. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: необходимый, признаки Даламбера и радикальный Коши.

Общих методов нахождения сумм рядов нет. Далее ряды изучаются на сходимость без нахождения их сумм. **Ряд с положительными членами:** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$**. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.** *Признак Даламбера.* Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$, то при $p<1$ ряд сходится, при $p>1$ ряд расходится, при $p=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным. *Признак Коши.* Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p$, то при $p<1$ ряд сходится, при $p>1$ ряд расходится, при $p=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Примеры. 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ с помощью признака Даламбера.

Решение. $u_n = \frac{3^n n!}{n^n}$; $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!(n+1)}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{(n+1)^n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n : n^n}{(n+1)^n : n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$= \frac{3}{e} > 1.$ По признаку Даламбера ряд расходится.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$ с помощью признака Коши.

Решение. $u_n = \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$; $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{(2n-1)^{1-\frac{1}{n}}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n-1)^{-\frac{1}{n}}}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} (2n-1)^{-\frac{1}{n}} = \left(\infty^0\right) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\ln(2n-1)} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n-1)}{n}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n-1)}{n}}$. В числителе дроби неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, но применить правило Лопиталя нельзя, т.к. функции под знаком предела дискретные, и производные от них не существуют. Заменим в функциях аргумент n на непрерывный аргумент x и тогда

$e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(2x-1)}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln(2x-1))'}{(x)'}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x-1}} = e^0 = 1$. Отсюда и $(2n-1)^{-\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n-1)^{-\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(2n-1)\cdot 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n:n}{(2n-1):n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$ По признаку Коши ряд сходится.

Задачи.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Даламбера.

1. $\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5\sqrt{5}} + \frac{4}{25} + \ldots$. 2. $\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \ldots$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

4. $\frac{1!}{2+1} + \frac{2!}{2^2+1} + \frac{3!}{2^3+1} + \ldots$. 5. $\frac{10}{11} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot 2^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^3 \cdot 3^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^4 \cdot 4^5 + \ldots$.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Коши.

6. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$.

Дополнительные задачи.

Исследовать на сходимость ряды.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. 11. $3 + (2{,}1)^2 + (2{,}01)^3 + (2{,}001)^4 + \ldots$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Даламбера.

13. $\frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7\sqrt{7}} + \frac{5}{49} + \ldots$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. 15. $\frac{2!}{(1!)^2} + \frac{4!}{(2!)^2} + \frac{6!}{(3!)^2} + \ldots$.

16. $\frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^5} + \left(\frac{11}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{3^5} + \left(\frac{11}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{4^5} + \ldots$.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Коши.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{2n-1}\right)^n$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2-3}{5n^2+1}\right)^{n^2}$.

Занятие 3. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: интегральный признак Коши.

Ряд с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **(**$u_n > 0$**).** *Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами.* Если в ряде заменить n на на x и обозначить $u_n = f(x)$, то ряд сходится или расходится вместе с интегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Нижний предел интегрирования должен совпадать с первым значением переменной n в сумме.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-2)}$.

Решение. $\frac{1}{(n+1)(n-2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n-2} = \frac{An - 2A + Bn + B}{(n+1)(n-2)}$;

$1 = (A+B)n - 2A + B$; $A + B = 0$, $-2A + B = 1$; $A = -B$, $3B = 1$, $A = -\frac{1}{3}$.

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n-2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-2};\ n \Rightarrow x:\ \int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_3^{\infty}\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}(-\ln(x+1) + \ln(x-2))\ \Big|_3^b = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{x-2}{x+1}\ \Big|_3^b =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{b-2}{b+1} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b-2}{b+1} + \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{1}{3}\ln\lim_{b\to\infty}\frac{b-2}{b+1} + \frac{2}{3}\ln 2 = \frac{1}{3}\ln 1 +$$

$+\frac{2}{3}\ln 2 = \frac{2}{3}\ln 2$. Интеграл сходится, ряд сходится.

Задачи.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью интегрального признака

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+1}$. 2. $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \ldots$. 3. $\frac{1}{9\ln^2 9} + \frac{1}{19\ln^2 19} + \ldots$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. 7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

Дополнительные задачи.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n} - \sqrt[3]{n})}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью интегрального признака.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.   10. $\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\frac{1}{5\ln 5}+\ldots$. 11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$.

12. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln(n-1)(\ln\ln(n-1))^2}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3n-2}$.

Занятие 4. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признаки сравнения.

Рассмотрим два знакоположительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n>0)$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n\ (v_n>0)$ (2). *Первый признак сравнения.* Если выполняется неравенство $u_n\le v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Предельный (второй) признак сравнения. Если существует конечный, отличный от нуля, предел отношения общих членов рядов (1) и (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A\ne 0$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно. При применении признаков должно быть известно о сходимости или расходимости одного из рядов (ряда сравнения). **Ряды сравнения.** *Гармонический ряд* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *расходится. Обобщённый гармонический ряд* (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *сходится*, если $p>1$, и *расходится*, если $p\le 1$. Ряд $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$, где $|q|<1$ из членов *убывающей геометрической прогрессии* **сходится** к сумме $S=\frac{a}{1-q}$.

Примеры.

Исследовать на сходимость ряды с помощью признаков сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^{2n}+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{3n^2-n+2}$.

Решение. 1. Применим первый признак сравнения: $u_n=\frac{5^n}{5^{2n}+1}$; $\frac{5^n}{5^{2n}+1}<\frac{5^n}{5^{2n}}=$ $=\frac{1}{5^n}$. $v_n=\frac{1}{5^n}$ – общий член ряда сравнения. Ряд сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1=\frac{1}{5}$ и знаменателем $q=\frac{1}{5}$. Этот ряд сходится к сумме $S=\frac{1}{4}$. Т.к. $u_n<v_n$, то по первому признаку сравнения изучаемый ряд сходится.

2. Для существования ненулевого конечного предела второго признака сравнения нужно, чтобы в нем в числителе и знаменателе стояли многочлены одного и того же порядка. Исходя из этого, в качестве ряда сравнения выбираем расходящийся гармонический ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-3)}{3n^2-n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-3):n^2}{(3n^2-n+2):n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

По предельному признаку сходимости рассматриваемый ряд расходится.

Задачи.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признаков сравнения.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$. 2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots$. 3. $\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{3^3+1}+\ldots$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+2n^2+n+1}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$. 7. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$.

8. $\frac{1}{2\cdot 1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4-1}+\ldots$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+n}$.

Дополнительные задачи.

11. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)\,(2\sqrt{n}-1)}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признаков сравнения.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^4+1}$. 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^3+1}$. 14. $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$. 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n^2+3}}$. 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$. 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n5^n}$.

20. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\ldots$. 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+n^2+2}$.

Занятие 5. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: признак Лейбница, исследование на абсолютную и условную сходимость.

Знакочередующиеся ряды. *Признак Лейбница.* Если в знакочередующемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 1) $u_n > u_{n+1}$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$, то ряд сходится. **Знакопеременные ряды (**u_n **имеет произвольный знак).** Знакопеременный ряд **абсолютно сходится**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, а знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то знакочередующийся ряд **сходится условно**. Если ряд из абсолютных величин и знакопеременный ряд расходятся, то исследуемый ряд расходится.

В первую очередь ряд исследуется на абсолютную сходимость.

Примеры.

Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Записываем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Это обобщенный гармонический ряд с показателем степени $s = \dfrac{4}{3} > 1$, который сходится. Следовательно, заданный ряд сходится абсолютно.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3n-1}$.

Решение. Записываем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{3n-1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}.$$

Применим первый признак сравнения, взяв в качестве ряда сравнения расходящийся гармонический ряд: $\dfrac{1}{3n-1} < \dfrac{1}{n}$ $\forall n$. Отсюда ряд из абсолютных величин расходится. Абсолютной сходимости нет. Исследуем ряд на условную сходимость, используя признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Условия признака Лейбница:

$$1)\ u_n > u_{n+1} \quad \text{и} \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

В нашем случае $u_n = \dfrac{1}{3n-1}$. 1) $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{11} > \ldots$; первое условие выполнено.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n-1} = 0$. Второе условие признака Лейбница выполняется. Ряд сходится условно.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n}{5n-2}$.

Решение. Записываем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n}{5n-2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n-2}.$$

Для получившегося ряда не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{5n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n:n}{(5n-2):n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5-\frac{2}{n}} = \frac{1}{5} \neq 0$. Ряд из абсолютных величин расходится, абсолютной сходимости нет. Но необходимый признак сходимости входит вторым условием в признак Лейбница и не выполняется. Условной сходимости ряда нет. Данный ряд расходится.

Задачи.

Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакопеременные ряды.

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$. 2. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$. 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{5^n}$. 6. $\frac{1}{10}-\frac{7}{10^2}+\frac{13}{10^3}-\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+\ldots$.

7. $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+1}+\frac{4}{4^3+1}-\frac{5}{5^3+1}+\ldots$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{(-5)^{2n}+1}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{9n^2-6n+10}$.

Дополнительные задачи.

11. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\right]^{\alpha}$.

12. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}-\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакопеременные ряды.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n!}$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}$. 16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{2^{\frac{n(n-1)}{}}}\frac{1}{5^n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n!)^2}$. 18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln n}$. 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n(3n-1)}$.

Занятие 6. Степенные ряды.

Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

называется **степенным**, a_i – коэффициенты ряда. Ряд при некоторых значениях x сходится, а при других – расходится. Множество значений переменной x, при которых степенной ряд сходится, называется его *областью сходимости*. Область сходимости представляет собой интервал числовой прямой $|x-a|<R$, внутри которого степенной ряд сходится **абсолютно**. R – радиус сходимости. **Интервал сходимости** степенного ряда находят с помощью признаков Даламбера или Коши из неравенств $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1$ где $u_n = a_n(x-x_0)^n$.

Примеры. Определить интервалы сходимости степенных рядов и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^{2n-1}}{n\cdot 5^n}$

Решение. Используем признак Даламбера: $|u_n| = \frac{|x-3|^{2n-1}}{n\cdot 5^n}$, $|u_{n+1}| = \frac{|x-3|^{2n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^{2n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 5^n}{|x-3|^{2n-1}} = = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^2\cdot n}{(n+1)\cdot 5} = \frac{|x-3|^2}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)} =$$

$=\frac{|x-3|^2}{5}<1$. $|x-3|^2<5$, $|x-3|<\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, отсюда $(3-\sqrt{5};3+\sqrt{5})$ – интервал абсолютной сходимости степенного ряда. Изучим сходимость ряда на концах интервала: $x=3+\sqrt{5}$; получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{5})^{2n-1}}{n\cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{5}}$. Исследование на абсолютную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{5}}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{5}}$. Из неравенства $\frac{1}{n\cdot\sqrt{5}}<\frac{1}{n}$ по первому признаку сравнения полученный ряд расходится (ряд сравнения – расходящийся гармонический ряд). Абсолютной сходимости нет. Условная сходимость знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{5}}$ имеет место, т.к. выполняются условия признака Лейбница: 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{1}{2\sqrt{5}}>\frac{1}{3\sqrt{5}}>...$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{5}}=0$. На другом конце интервала сходимости $x=3-\sqrt{5}$ получаем числовой ряд $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 5^n}$, результаты исследования сходимости которого аналогичны полученным на правом конце интервала. Таким образом, степенной ряд сходится на отрезке $[3-\sqrt{5};3+\sqrt{5}]$, причем на интервале $(3-\sqrt{5};3+\sqrt{5})$ – абсолютно, а на концах $x=3\pm\sqrt{5}$ – условно.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Решение. Используем признак Даламбера: $|u_n|=\dfrac{|x|^n}{n!}$, $|u_{n+1}|=\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=$ $=\dfrac{|x|^n|x|}{n!(n+1)}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{(n+1)}=0<1$ для любых x. Поэтому ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой $(-\infty;\infty)$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(2x-5)^n$.

Решение. Используем признак Даламбера:
$|u_n|=n!|2x-5|^n$, $|u_{n+1}|=(n+1)!|2x-5|^{n+1}=n!(n+1)|2x-5|^n|2x-5|$.
$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)|2x-5|=\infty>1$ для любых x. Поэтому ряд расходится для всех x, кроме $x=\dfrac{5}{2}$.

Задачи.

Определить интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

1. $1+\dfrac{x}{2\cdot 5}+\dfrac{x^2}{3\cdot 5^2}+\dfrac{x^3}{4\cdot 5^3}+\ldots$. 2. $\dfrac{x+1}{1!}+\dfrac{(x+1)^2}{2!}+\dfrac{(x+1)^3}{3!}+\ldots$.

3. $x+(2x)^2+(3x)^3+(4x)^4+\ldots$. 4. $\dfrac{3x+2}{1}+\dfrac{(3x+2)^2}{4}+\dfrac{(3x+2)^3}{7}+\ldots$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{7^n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n(x-1)^n}{n!}$. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}(x-e)^n$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{3n}}{n(2^n+1)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^{2n}}{n^2}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^{2n-1}}{n\cdot 7^n}$.

Дополнительные задачи.

11. Определить интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+\sqrt{n}}$ и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Определить интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

12. $1+\dfrac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\dfrac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\dfrac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots$. 13. $5x+\dfrac{(5x)^2}{2!}+\dfrac{(5x)^3}{3!}+\ldots$.

14. $\dfrac{2x-3}{1}+\dfrac{(2x-3)^2}{3}+\dfrac{(2x-3)^3}{5}+\ldots$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$. 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!x^n}{n\cdot(n!)^2}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{n-1}}{n^4}$. 18. $\dfrac{x}{2+3}+\dfrac{x^2}{2^2+3^2}+\dfrac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots$. 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)\cdot 4^n}$.

20. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{2^2}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{(x-1)^3}{2^3}+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{(x-1)^4}{2^4}+\ldots$.

Занятие 7. Степенные ряды. Приложения степенных рядов: разложение функций в степенные ряды.

Ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots\ .$$

Ряд Маклорена получается из ряда Тейлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ .$$

Разложения в ряд Маклорена элементарных функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty).$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ \ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\ (-1<x\le 1).$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\ -1\le x\le 1.$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\ (-1<x<1).$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots\ (-1<x<1).$$

Примеры. 1. Разложить функцию $y=\cos^2 x$ в ряд Маклорена и найти интервал сходимости ряда.

Решение. Продифференцируем функцию n раз:

$$y=\cos^2 x,\ y'=-2\sin x\cos x=-\sin 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-2\cos 2x=2\cos(2x+\pi),\quad y'''=2^2\sin 2x=2^2\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV}=2^3\cos 2x=2^3\cos(2x+2\pi),\ \dots\ ,\quad y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

При $x=0$ $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=0$, $y^{IV}(0)=2^3$, $y^{V}(0)=0$, $y^{VI}(0)=-2^5$, … . Отсюда

$$\cos^2 x=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots .$$

Для нахождения интервала сходимости полученного ряда используем признак Даламбера:

$$|u_n|=\frac{2^{n-1}}{(2n)!}|x|^{2n},\ |u_{n+1}|=\frac{2^n}{(2n+2)!}|x|^{2n+2}=\frac{2^{n-1}\cdot 2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}|x|^{2n}|x|^2;$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2|x|^2}{(2n+1)(2n+2)}=0<1$ для любых x. Интервал абсолютной сходимости ряда $(-\infty;\infty)$.

Другим способом является применение разложения в степенной ряд косинуса с заменой аргумента x на $2x$. Используем равенство $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots\right)=$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots .$$

2. Разложить в ряд Тейлора функцию $y=\frac{1}{x}$ по степеням $x+3$.

Решение. Продифференцируем функцию n раз:

$$y'=-\frac{1}{x^2},\ y''=\frac{2}{x^3},\ y'''=-\frac{2\cdot 3}{x^4},\ y^{IV}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5},\ \dots\ ,\ y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

При $x=3$ $y(-3)=-\frac{1}{3}$, $y'(-3)=-\frac{1}{3^2}$, $y''(-3)=-\frac{2}{3^3}$, $y'''(-3)=-\frac{2\cdot 3}{3^4}$, $y^{IV}(-3)=-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3^5}$, … , $y^{(n)}(-3)=-\frac{n!}{3^{n+1}}$. Отсюда

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}-\frac{x+3}{3^2}-\frac{(x+3)^2}{3^3}-\frac{(x+3)^3}{3^4}-\ldots-\frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}-\ldots .$$

Для нахождения интервала сходимости полученного ряда используем признак Даламбера:

$$|u_n| = \frac{|x+3|^n}{3^{n+1}},\ |u_{n+1}| = \frac{|x+3|^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{|x+3|^n |x+3|}{3^{n+1}\cdot 3};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x+3|}{3} < 1.$$

Отсюда $|x+3|<3$ и $-6<x<0$. Интервал абсолютной сходимости $(-6;0)$. На концах ряд расходится.

Второй способ. Используем разложение в степенной ряд функции $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3-(x+3)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+3}{3}} = -\frac{1}{3}\left[1+\frac{x+3}{3}+\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+\left(\frac{x+3}{3}\right)^3+\ldots\right].$$

Раскрыв скобки, получаем исходный ряд.

Задачи.

Разложить функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости рядов.

1. $f(x)=\ln(3+2x)$. 2. $f(x)=\sin 3x$. 3. $f(x)=\frac{1}{1-2x}$. 4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$.

5. $f(x)=5^x$. 6. $f(x)=x\sqrt{x}$.

Разложить функции в ряд Тейлора в окрестностях указанной точки.

7. $f(x)=\frac{1}{5+x}$; $x=2$. 8. $f(x)=e^x$; $x=-5$. 9. $f(x)=\frac{1}{x^2+3x=2}$; $x=-4$.

Дополнительные задачи.

10. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln\frac{1+2x}{1-2x}$ и найти интервал сходимости ряда.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 3.

Разложить функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости рядов.

11. $f(x)=e^{x^2}$. 12. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$. 13. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$. 14. $f(x)=\ln(5+x)$.

15. $f(x)=\arcsin x$. 16. $f(x)=\frac{1}{x}arctg\,2x$.

Разложить функции в ряд Тейлора в окрестностях указанной точки.

17. $f(x)=\cos x$; $x=\frac{\pi}{2}$. 18. $f(x)=\sqrt[3]{x}$; $x=1$. 19. $f(x)=\frac{1}{x^2}$; $x=-1$.

20. $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$; $x=1$.

Занятие 8. Приложения степенных рядов: приближенные вычисления.

Разложения в ряд Маклорена элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \le 1).$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad -1 \le x \le 1.$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$$

Примеры. Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции с заданной точностью ε.

1. $\sqrt[4]{19}$; $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Находим ближайшее к 19 число, из которого извлекается корень четвертой степени. Это число 16:

$$\sqrt[4]{19} = \sqrt[4]{16+3} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{3}{16}\right)} = 2\left(1+\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Используем разложение в степенной ряд функции $(1+x)^m$ при $x = \frac{3}{16}$ и $m = \frac{1}{4}$: $\sqrt[4]{19} = 2\left(1+\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{4}} =$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{16} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{256} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{27}{4096} + \ldots\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{3}{64} - \frac{27}{8192} + \frac{405}{1572864} + \ldots\right).$$

Четвертый член разложения меньше заданной точности и при переходе к десятичным дробям отбрасываем его и все последующие члены. В десятичных дробях сохраняем на один знак после запятой больше, чем знаков в заданной точности $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\sqrt[4]{19} \approx 2(1 + 0{,}0469 - 0{,}0033) = 2\cdot 1{,}0436 = 2{,}0872 \approx 2{,}087.$$

В ответе сохраняем три знака как в заданной точности.

2. $\ln 1{,}04$; $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$ в ряд:

$$\ln 1{,}04 = \ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} + \ldots = 0{,}04 - 0{,}0008 +$$

$+0{,}00002 + \ldots \approx 0{,}04 - 0{,}00080 = 0{,}0382$. Отбрасываем все члены разложения, начиная с третьего, т.к. $0{,}00002 < 0{,}0001$.

3. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$; $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx = \int\limits_0^{0,1} \frac{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} dx = \int\limits_0^{0,1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} dx =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_0^{0,1} x^{n-1} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^n}{n} \Big|_0^{0,1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0{,}1)^n}{n \cdot n!} = 0{,}1 + \frac{0{,}01}{2 \cdot 2} + \frac{0{,}001}{3 \cdot 6} + \ldots = 0{,}1 + 0{,}0025 +$

$+0{,}00006 \approx 0{,}1 + 0{,}0025 = 0{,}1025 \approx 0{,}103$.

Задачи.

Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции с заданной точностью ε.

1. $\sqrt{e}$; $\varepsilon = 0{,}001$. 2. $\cos 18^0$; $\varepsilon = 0{,}001$. 3. $\sqrt[5]{1{,}1}$; $\varepsilon = 0{,}001$. 4. $\ln 0{,}98$; $\varepsilon = 0{,}0001$.
5. $\sqrt[3]{65}$; $\varepsilon = 0{,}001$. 6. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$; $\varepsilon = 0{,}001$. 7. $\int\limits_0^{0,5} \frac{arctg\, x}{x} dx$; $\varepsilon = 0{,}001$.
8. $\int\limits_0^{0,8} x^{10} \cos x\, dx$; $\varepsilon = 0{,}001$. 9. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$; $\varepsilon = 0{,}001$

Дополнительные задачи.

10. Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции $arctg 1{,}1$ с заданной точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 3.

Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции с заданной точностью ε.

11. $\ln 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}001$. 12. $\sqrt[3]{150}$; $\varepsilon = 0{,}001$. 13. $\sqrt[3]{e}$; $\varepsilon = 0{,}0001$. 14. $\sin 80^0$; $\varepsilon = 0{,}001$. 15. $arctg\, 0{,}9$; $\varepsilon = 0{,}0001$. 16. $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$; $\varepsilon = 0{,}001$. 17. $\int\limits_0^1 \sin x^3\, dx$; $\varepsilon = 0{,}001$. 18. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x\, dx$; $\varepsilon = 0{,}001$. 19. $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\, e^x dx$; $\varepsilon = 0{,}001$.

20. $\int\limits_0^{1/8} \sqrt{1 - x^2}\, dx$; $\varepsilon = 0{,}001$.

Занятие 9. Контрольная работа «Числовые и степенные ряды».

Примерный вариант контрольной работы.

Задача 1. Исследуйте ряды на сходимость.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n n!}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$.

Задача 2. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}.$$

Задача 3. Определите интервал абсолютной сходимости ряда и исследуйте сходимость ряда на концах интервала.

$$\frac{x+4}{2\cdot 3}+\frac{(x+4)^2}{3\cdot 3^2}+\frac{(x+4)^3}{4\cdot 3^3}+\ldots\ .$$

Задача 4. Вычислите $\sqrt[6]{65}$ с точностью до 0,001.

Занятие 10. Общий ряд Фурье.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке $[a;b]$, называются *ортогональными* на этом отрезке, если $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0$.

Определение. Последовательность функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, … $\varphi_n(x)$, … , непрерывных (кусочно-непрерывных) на отрезке $[a;b]$, называется *ортогональной системой функций* на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \lambda_n, & i=j.\end{cases}$$

Определение. Система функций называется **ортонормированной** на отрезке $[a;b]$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

Любую ортогональную систему можно сделать ортонормированной, разделив ее n-ую функцию на число λ_n.

Определение. *Общим рядом Фурье* по ортогональной системе функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, … $\varphi_n(x)$, … , называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x). \tag{1}$$

Если ряд (1) сходится для всех $x\in[a,b]$ к сумме $f(x)$, то можно записать

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),\quad x\in[a,b]. \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx\,. \qquad (3)$$

Коэффициенты (3) называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются по формуле

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $[-1;1]$. Полиномы находятся как решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \lambda x = 0$$

при условии, что решение $y(x)$ ограничено при $x \to 1-0$ и $x \to -1+0$.

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n\left[(1-x^2)^n\right]}{dx^n}, \quad n = 0,1,\ldots\,.$$

$$P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,\ \ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),\ \ldots\,.$$

Полиномы Чебышева ортогональны на отрезке $[-1;1]$. Полиномы находятся как решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,y'\right] + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\,y = 0$$

при условии, что решение $y(x)$ ограничено при $x \to \pm 1$.

Формула Родрига:

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n\left[(1-x^2)^{n-1/2}\right]}{dx^n}, \quad n = 0,1,\ldots\,.$$

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2-1,\ T_3(x) = 4x^3-3x,\ T_4(x) = 8x^4-8x^2+1,\ \ldots\,.$$

Примеры. 1. Показать ортогональность *тригонометрической системы функций* на $[-\pi;\pi]$:

$$\frac{1}{2},\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \ldots\,.$$

Решение. Все функции системы имеют общий период 2π. Проверяем определение ортогональности.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}(\pi+\pi) = \frac{1}{2} \neq 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos nx)dx = \pi - \frac{1}{2n}\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \pi \neq 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos nx)dx = \pi - \frac{1}{2n}\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \neq 0.$$

В следующих вычислениях используем равенство нулю интеграла от нечетной функции в симметричных пределах.

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0,\quad \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{2n}\sin nx\ \Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(k-n)x-\cos(k+n)x)\,dx=\frac{1}{2(k-n)}\sin(k-n)x\ \Big|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{2(k+n)}\sin(k+n)x\ \Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(k-n)x+\cos(k+n)x)\,dx=\frac{1}{2(k-n)}\sin(k-n)x\ \Big|_{-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{1}{2(k+n)}\sin(k+n)x\ \Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx\,dx=0.$$

Согласно определению тригонометрическая система функций ортогональна на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Замечание. Рассмотренная система функций ортогональна на любом отрезке $[a;\, a+2\pi]$ длины 2π.

2. Записать первые три коэффициента разложения функции $f(x)=x^4$ на отрезке [–1;1] в ряд по ортогональным полиномам Лежандра.

Решение. Полиномы Лежандра $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$.

$$\int_{-1}^{1}1^2\,dx=1+1=2=\lambda_0,\quad \int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{x}{3}\ \Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}=\lambda_1,\quad \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(9x^4-6x^2+1)\,dx=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{5}x^5-2x^3+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{5}-2+1\right)=\frac{2}{5}=\lambda_2.$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4\,dx=\frac{1}{5},\quad a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^5\,dx=\frac{3}{12}x^6\ \Big|_{-1}^{1}=0,\quad a_2=\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(3x^6-x^4)\,dx=$$

$$=\frac{5}{4}\left(\frac{3}{7}x^7-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{35}=\frac{4}{7}.$$ Имеем разложение:

$$x^4=2+\frac{2}{7}(x^2-1)+\dots.$$

Задачи.

1. Показать ортогональность тригонометрической системы функций

$$\frac{1}{2},\ \sin x,\ \sin 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \dots\quad \text{на}\quad [0;\pi].$$

2. Показать ортогональность на отрезке [–1;1] трех первых полиномов Лежандра.

3. По формуле Родрига найти полином Лежандра $P_4(x)$.

4. Записать первые три коэффициента разложения функции $f(x)=e^x$ на отрезке [–1;1] в ряд по ортогональным полиномам Лежандра.

Дополнительные задачи.

5. Показать ортогональность тригонометрической системы функций

$$\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, \ldots \text{ на } [-l;l].$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 8.

6. Показать ортогональность тригонометрической системы функций

$$\frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots \text{ на } [0;\pi].$$

7. Показать ортогональность на отрезке $[-1;1]$ трех первых полиномов Чебышева.

8. По формуле Родрига найти полином Чебышева $T_5(x)$.

9. Записать первые три коэффициента разложения функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[-1;1]$ в ряд по ортогональным полиномам Чебышева.

Занятие 11. Тригонометрические ряды Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.

Ряд Фурье для кусочно-непрерывной 2π-периодической функции на промежутке $[-\pi;\pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Для четной функции периода 2π разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx; \; b_n = 0;$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1, 2, \ldots;$$

для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \quad a_0 = a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Функцию периода 2π можно разложить в ряд Фурье (1) на любом промежутке $[a; a+2\pi]$ длины 2π. Коэффициенты Фурье при этом вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1,2,\dots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,\dots .$$

Теорема (о сходимости тригонометрического ряда Фурье). Если $f(x)$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (1) сходится в каждой точке отрезка и для суммы $S(x)$ ряда Фурье справедливы следующие соотношения:

1). $S(x) = f(x)$, если x – точка непрерывности функции $f(x)$;

2). $S(x) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, если x – точка разрыва первого рода функции $f(x)$;

3). $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$.

Пример. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Решение. Функция $f(x)$ является нечетной, поэтому $a_0 = a_n = 0$, $f(x) = 1$ на $[0;\pi]$, $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx = -\dfrac{2}{\pi n}\cos nx \Big|_0^{\pi} = = \dfrac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) =$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi n}, & n = 2k-1. \end{cases} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin nx.$$

Задачи.

1. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ на $0 \le x \le 2\pi$, построить графики его первых частичных сумм и найти значение $S(x_0)$ суммы ряда в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Разложить в ряд Фурье функции на отрезке $[-\pi;\pi]$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ 3. $f(x) = 3x + 1$. 4. $f(x) = x^2$. 5. $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$.

6. $f(x) = |x|$.

Разложить в ряд Фурье функции, определенные на отрезке $[0;\, 2\pi]$.
7. $f(x) = 5x + 2$. 8. $f(x) = e^x$.

Дополнительные задачи.
9. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |\cos x|$, определенную на отрезке $[-\pi,\ \pi]$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 8.
Разложить в ряд Фурье функции.
10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ 11. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 4$ на $[0;\, 2\pi]$. 12. $f(x) = 4x^2 + 1$ на $[-\pi;\ \pi]$. 13. $f(x) = |x + 2|$ на $[\pi;\, 3\pi]$. 14. $f(x) = 2^x$ на $[-\pi;\ \pi]$.
15. $f(x) = \cos 2x$ на $[-\pi;\ \pi]$.

Занятие 12. Тригонометрические ряды Фурье на промежутке $[-l;\, l]$.

Ряд Фурье для функции $f(x)$ периода $T = 2l$, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[-l;\, l]$, имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right); \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx; \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = 0;$$

для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x; \quad a_0 = a_n = 0;$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,\ldots\ .$$

Пример. Разложить в ряд Фурье $2l$-периодическую функцию, заданную на отрезке $[-l;\, l]$ формулой $f(x)=|x|$.

Решение. Функция $f(x)$ является четной, поэтому применяем соответствующие формулы, причем на отрезке $[0;\, l]$ $f(x)=|x|=x$.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=\frac{x^2}{l}\Big|_0^l=l;\quad b_n=0;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{\pi n}{l}xdx=\left\{u=x,\, du=dx, dv=\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx, v=\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}=$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{\pi n}x\sin\frac{\pi n}{l}\Big|_0^l-\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{\pi n}\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}dx=\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\Big|_0^l=\frac{2l}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-1)=$$

$$=\frac{2l}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{4l}{\pi^2n^2}, & n=2k-1.\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{l}x=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{\pi n}{l}x.$$

Задачи.

Разложить в ряд Фурье.

1. $f(x)=\begin{cases}2, & -4\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 4.\end{cases}$ 2. $f(x)=2x^2$ на $[-2;2]$. 3. $f(x)=2-3x$ на $[-1;1]$.

4. $f(x)=1+|x|$ на $[-1/2;1/2]$. 5. $f(x)=x$ при $-\pi/2\le x\le\pi/2$.

6. $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 1.\end{cases}$ 7. $f(x)=e^x$ на $[-l;\, l]$.

Дополнительные задачи.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0,\\ 1, & 0<x<1/2,\\ 0, & 1/2\le x\le 1.\end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 8.

Разложить в ряд Фурье функции.

9. $f(x)=\begin{cases}-1, & -3\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 3.\end{cases}$ 10. $f(x)=9-2x$ на $[-1;1]$. 11. $f(x)=x^2-1$ на $[-2;2]$.

12. $f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1.\end{cases}$ 13. $f(x)=3x^3$ на $[-1;1]$. 14. $f(x)=\sin\dfrac{2\pi x}{l}$ на $[-l;\, l]$.

Занятие 13. Тригонометрические ряды Фурье для непериодических функций.

1. Если непериодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l,l]$ или $[a,a+2l]$ длины $2l$, то возможно периодическое продолжение функции с периодом $T=2l$ на всю числовую ось. Тогда эту функцию можно разложить в ряд Фурье по формулам (1.11) и (1.12). В случае отрезка $[a,a+2l]$ пределы интегрирования в формулах (1.12) заменяются на a и $a+2l$.

2. Если непериодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,l]$ длины l, то возможно периодическое продолжение функции с периодом $T=l$ на всю числовую ось. Тогда эту функцию можно разложить в ряд Фурье по следующим формулам:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{l}x\right). \qquad (1.16)$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\cos\frac{2\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,\ldots; \qquad (1.17)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l,2}f(x)\sin\frac{2\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,\ldots .$$

3. Если непериодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,l]$ длины l, то возможны ее четное или нечетное продолжения на отрезок $[-l,0]$ и далее на всю числовую ось с периодом $T=2l$. При четном продолжении получаем ряд Фурье только по косинусом, а при нечетном – только по синусам.

Пример. Разложить функцию $f(x)=x$ на отрезке $[0,\pi]$ в ряд Фурье а) по косинусам: б) по синусам.

Решение. а) Ряд по косинусам: $b_n=0$; $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi}=\pi$;

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\left\{u=x,\ du=dx, dv=\cos nx\,dx, v=\frac{1}{n}\sin nx\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{l}=\frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n=2k-1.\end{cases}\qquad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

б) Ряд по синусам: $a_0=a_n=0$; $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=$

$$=\left\{u=x,\ du=dx,\ dv=\sin nx,\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\right\}=-\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nxdx=$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos \pi n = \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}. \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

Задачи.

1. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=1$ на $[0;\pi]$.

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\frac{x}{2}$ на $[0,2]$.

3. Разложить в ряд Фурье а) с периодом π, б) по синусам, в) по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}1-2x/\pi, & 0\le x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2< x\le \pi.\end{cases}$$

4. Разложить в ряд Фурье а) с периодом $\frac{3}{2}$, б) по синусам, в) по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & 3/2\le x\le 2,\\ 3-x, & 2< x\le 3.\end{cases}$$

Дополнительные задачи.

5. Разложить в ряд Фурье а) с периодом π, б) по синусам, в) по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \pi/2,\\ -\cos x, & \pi/2< x\le \pi.\end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 8.

6. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\cos 2x$ на $[0;\pi]$.

7. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=2x-1$ на $[0,2]$.

8. Разложить в ряд Фурье а) с периодом π, б) по синусам, в) по косинусам функцию $f(x)=x^2$ на $[0;\pi]$.

9. Разложить в ряд Фурье по косинусам на $[0,2]$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1< x\le 2.\end{cases}$$

Занятие 14. Контрольная работа «Ряды Фурье».

Примерный вариант контрольной работы.

Задача 1. Разложить в ряд Фурье функцию а) $f(x)=\frac{1}{4}(\pi x-1)$ на $[-\pi;\ \pi]$;

б) $f(x)=\frac{1}{3}x$ на $[–1;\ 1]$;

Задача 2. Разложить в ряд Фурье а) с периодом π, б) по синусам, в) по косинусам функцию $f(x)=1-2x^2$ на $[0;\ \pi]$.