Занятие 1. Числовые ряды: общий член ряда, сумма ряда, необходимый признак сходимости.

Числовым рядом называется бесконечная сумма $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ действительных чисел. u_n – **общий** или n-ый член ряда. Ряд считается заданным, если задан его общий член. Основной вопрос: имеет ли бесконечная сумма конечное значение?

Рассмотрим n *-ую частичную сумму* ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Числовой ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел n -ой частичной суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Другими словами, ряд называется **сходящимся**, если **бесконечная сумма имеет конечное значение.** S называется **суммой** ряда. Для сходящегося ряда можно записать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S .$$

Если предел n -ой частичной суммы бесконечен или не существует, то числовой ряд называется **расходящимся.**

Необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. При его выполнении ряд может как сходиться, так и расходиться. Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Ряд $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$, где $|q| < 1$ из членов *убывающей геометрической прогрессии* **сходится** к сумме $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Примеры. 1. Записать первые четыре члена ряда с общим членом

$$u_n = \frac{n}{3^n\,(2n+1)} .$$

Решение. Полагая в заданной формуле $n = 1, 2, 3, 4$, получаем:

$$u_1 = \frac{1}{3^1(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{9},\ u_2 = \frac{2}{3^2(2\cdot 2+1)} = \frac{2}{45},\ u_3 = \frac{3}{27\cdot 7} = \frac{1}{72},\ u_4 = \frac{4}{729} .$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n\,(2n+1)} = \frac{1}{9} + \frac{2}{45} + \frac{1}{72} + \frac{4}{729} + \dots .$$

2. Найти общий член ряда $\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{8\cdot 9}+\ldots$.

Решение. В числителе – единица, в знаменателе – произведение двух соседствующих четного и нечетного чисел $2n$ и $2n+1$, $n=1,2,3,\ldots$. Знак слагаемых чередуется и описывается формулой $(-1)^{n-1}$. Окончательно,

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n\cdot(2n+1)}.$$

3. Найти общий член ряда $1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\ldots$.

Решение. В числителе – единица, в знаменателе – квадрат номера слагаемого. Знак слагаемых описывается формулой $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $n=0,1,2,3,\ldots$.

Тогда

$$u_n=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n+1)^2},\ \ n=0,1,2,3,\ldots .$$

4. Найти сумму ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots .$$

Решение. Члены ряда образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{4}$ и первым членом $a_1=1$. Отсюда

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

5. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Решение. Разложим общий член ряда на простейшие дроби:

$$u_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\ \frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}==\frac{1}{3}\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3}\ \frac{1}{3n+1}.$$

Найдем частичную сумму ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} =$$

$$+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\right)\ldots + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}\right) =$$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}$. Для нахождения суммы ряда находим предел:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

5. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots .$$

Решение. Разложим общий член ряда $u_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и отбрасываем их слева и справа:

$$1 = A(n^2 + 3n + 2) + B(n^2 + 2n) + C(n^2 + n).$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n слева и справа:

$$\left[\begin{array}{l} n^2: \\ n\ : \\ n^0: \end{array}\right. \begin{cases} 0 = A + B + C, \\ 0 = 3A + 2B + C, \\ 1 = 2A. \end{cases}$$

Находим $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$u_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$u_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right),\ u_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right),\ u_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right),$$

$u_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right), \ldots .$

и

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) =$$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$. Таким образом,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4}.$$

6. С помощью необходимого признака сходимости изучить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n-1}.$$

Решение. $u_n = \frac{n+1}{3n-1}$. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1):n}{(3n-1):n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$. Общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится.

Задачи.

Записать первые четыре члена рядов по заданному общему члену.

1. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}(3n+1)}{2n^2+1}$. 2. $u_n = \frac{n+3}{n!}$.

Найти общие члены заданных рядов.

3. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots$. 4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$.

Найти суммы заданных рядов.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$. 6. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \ldots$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

Дополнительные задачи.

9. Найти общий член ряда $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{15}\ldots$.

Найти суммы заданных рядов.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}$. 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{5}+n)(\sqrt{5}+n+1)}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Записать первые четыре члена рядов по заданному общему члену.

12. $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n2^n+1}$. 13. $u_n=\dfrac{2n}{(2n)!!}$, $((2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2n)$.

Найти общие члены заданных рядов.

14. $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{4}}+\dfrac{1}{5\sqrt{5}}+\ldots$. 15. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\ldots$

Найти суммы заданных рядов.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 17. $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}-\dfrac{1}{125}+\dfrac{1}{625}-\ldots$. 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{4n^2+8n+3}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

В задачах для самостоятельной работы ссылки на пособие *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Е.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 частях. – М.: Оникс, 2009. Часть 2. Ссылки совпадают для всех изданий, начиная с четвертого (1986 г.)