Занятие 2. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: необходимый, признаки Даламбера и радикальный Коши.

Общих методов нахождения сумм рядов нет. Далее ряды изучаются на сходимость без нахождения их сумм. **Ряд с положительными членами:** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **(**$u_n > 0$**). Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.** *Признак Даламбера.* Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$, то при $p < 1$ ряд сходится, при $p > 1$ ряд расходится, при $p = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным. *Признак Коши.* Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p$, то при $p < 1$ ряд сходится, при $p > 1$ ряд расходится, при $p = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Примеры. 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ с помощью признака Даламбера.

Решение. $u_n = \frac{3^n n!}{n^n}$; $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!(n+1)}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{(n+1)^n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n : n^n}{(n+1)^n : n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} =$$

$= \frac{3}{e} > 1.$ По признаку Даламбера ряд расходится.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$ с помощью признака Коши.

Решение. $u_n = \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$; $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{(2n-1)^{1-\frac{1}{n}}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n-1)^{-\frac{1}{n}}}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} (2n-1)^{-\frac{1}{n}} = \left(\infty^0\right) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\ln(2n-1)} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n-1)}{n}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n-1)}{n}}$. В числителе дроби неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, но применить правило Лопиталя нельзя, т.к. функции под знаком предела дискретные, и производные от них не существуют. Заменим в функциях аргумент n на непрерывный аргумент x и тогда

$e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(2x-1)}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln(2x-1))'}{(x)'}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x-1}} = e^0 = 1$. Отсюда и $(2n-1)^{-\frac{1}{n}} \to 1$ при $n\to\infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n-1)(2n-1)^{-\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n-1)\cdot 1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n:n}{(2n-1):n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} < 1$. По признаку Коши ряд сходится.

Задачи.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Даламбера.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5\sqrt{5}} + \dfrac{4}{25} + \ldots$. 2. $\dfrac{10}{1!} + \dfrac{10^2}{2!} + \dfrac{10^3}{3!} + \ldots$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^5}$.

4. $\dfrac{1!}{2+1} + \dfrac{2!}{2^2+1} + \dfrac{3!}{2^3+1} + \ldots$. 5. $\dfrac{10}{11} + \left(\dfrac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5 + \left(\dfrac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5 + \left(\dfrac{10}{11}\right)^4\cdot 4^5 + \ldots$.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Коши.

6. $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{7}\right)^3 + \ldots$. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^n$.

Дополнительные задачи.

Исследовать на сходимость ряды.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$. 11. $3 + (2{,}1)^2 + (2{,}01)^3 + (2{,}001)^4 + \ldots$. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Даламбера.

13. $\dfrac{2}{\sqrt{7}} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7\sqrt{7}} + \dfrac{5}{49} + \ldots$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$. 15. $\dfrac{2!}{(1!)^2} + \dfrac{4!}{(2!)^2} + \dfrac{6!}{(3!)^2} + \ldots$.

16. $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4^5}+\ldots$.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признака Коши.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{2n-1}\right)^n$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-3}{5n^2+1}\right)^{n^2}$.