

Занятие 3. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: интегральный признак Коши.

Ряд с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$). *Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами.* Если в ряде заменить n на x и обозначить $u_n = f(x)$, то ряд сходится или расходится вместе с интегралом $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Нижний предел интегрирования должен совпадать с первым значением переменной n в сумме.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-2)}$.

Решение.
$$\frac{1}{(n+1)(n-2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n-2} = \frac{An - 2A + Bn + B}{(n+1)(n-2)};$$

$$1 = (A+B)n - 2A + B; \quad A+B=0, \quad -2A+B=1; \quad A=-B, \quad 3B=1, \quad A=-\frac{1}{3}.$$

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n-2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n-2}; \quad n \Rightarrow x: \quad \int_3^{\infty} f(x) dx = \int_3^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{1}{3} \int_3^{\infty} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} (-\ln(x+1) + \ln(x-2)) \Big|_3^b = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{x-2}{x+1} \Big|_3^b =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{b-2}{b+1} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{b-2}{b+1} + \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{1}{3} \ln \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b-2}{b+1} + \frac{2}{3} \ln 2 = \frac{1}{3} \ln 1 +$$

$$+ \frac{2}{3} \ln 2 = \frac{2}{3} \ln 2. \quad \text{Интеграл сходится, ряд сходится.}$$

Задачи.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью интегрального признака

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 + 1}$.
2. $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots$.
3. $\frac{1}{9 \ln^2 9} + \frac{1}{19 \ln^2 19} + \dots$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \quad 7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$$

Дополнительные задачи.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n} - \sqrt[3]{n})}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью интегрального признака.

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \quad 10. \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \frac{1}{5 \ln 5} + \dots \quad 11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$$

$$12. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \ln(n-1) (\ln \ln(n-1))^2} \quad 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n-2}$$