Занятие 4. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признаки сравнения.

Рассмотрим два знакоположительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$) (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ($v_n > 0$) (2). *Первый признак сравнения.* Если выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Предельный (второй) признак сравнения. Если существует конечный, отличный от нуля, предел отношения общих членов рядов (1) и (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \ne 0$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно. При применении признаков должно быть известно о сходимости или расходимости одного из рядов (ряда сравнения). **Ряды сравнения.** *Гармонический ряд* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *расходится. Обобщённый гармонический ряд* (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *сходится*, если $p > 1$, и *расходится*, если $p \le 1$. Ряд $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$, где $|q| < 1$ из членов *убывающей геометрической прогрессии* **сходится** к сумме $S = \frac{a}{1-q}$.

Примеры.

Исследовать на сходимость ряды с помощью признаков сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^{2n}+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{3n^2-n+2}$.

Решение. 1. Применим первый признак сравнения: $u_n = \frac{5^n}{5^{2n}+1}$; $\frac{5^n}{5^{2n}+1} < \frac{5^n}{5^{2n}} = \; = \frac{1}{5^n}$.

$v_n = \frac{1}{5^n}$ – общий член ряда сравнения. Ряд сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = \frac{1}{5}$ и знаменателем $q = \frac{1}{5}$. Этот ряд сходится к сумме $S = \frac{1}{4}$. Т.к. $u_n < v_n$, то по первому признаку сравнения изучаемый ряд сходится.

2. Для существования ненулевого конечного предела второго признака сравнения нужно, чтобы в нем в числителе и знаменателе стояли многочлены одного и того же порядка.

Исходя из этого, в качестве ряда сравнения выбираем расходящийся гармонический ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-3)}{3n^2-n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-3):n^2}{(3n^2-n+2):n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} \neq 0 .$$

По предельному признаку сходимости рассматриваемый ряд расходится.

Задачи.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признаков сравнения.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$. 2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots$. 3. $\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{3^3+1}+\ldots$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+2n^2+n+1}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$. 7. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$.

8. $\frac{1}{2\cdot 1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4-1}+\ldots$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+n}$.

Дополнительные задачи.

11. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)\,(2\sqrt{n}-1)}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды с помощью признаков сравнения.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^4+1}$. 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^3+1}$. 14. $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$. 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n^2+3}}$. 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$. 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n5^n}$.

20. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\ldots$. 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+n^2+2}$.