

Лекция 1. Числовой ряд. Основные понятия, свойства сходящихся рядов.

Знакоположительные ряды.

1.1. Некоторые сведения о последовательностях

Пусть каждому значению $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие (по определённым правилам) определённое действительное число $a \in \mathbb{R}$; тогда множество упорядоченных действительных чисел a_1, a_2, a_3, \dots называется числовой последовательностью и обозначается $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где a_n – общий член последовательности. Например,

последовательность $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$ имеет общий член $a_n = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей*, если $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и *возрастающей*, если $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M , $M \in \mathbb{R}$, что $a_n < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и *ограниченной снизу*, если существует такое число M , $M \in \mathbb{R}$, что $a_n \geq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена как снизу, так и сверху, т.е. существует такое число $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$), что $\forall n: |a_n| \leq M$.

Определение 4. Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$,

если для любого сколь угодно малого положительного числа ε

найдётся такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, зависящий от ε , что для всех натуральных чисел $n \geq n_0$

выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Тогда $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ означает,

что $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$. При

этом говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a .

Приведём некоторые свойства сходящихся последовательностей.

–Если последовательность имеет предел, то он единственен.

–Если последовательность имеет конечный предел, то эта последовательность ограничена.

–Если последовательность возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел.

–Если последовательность возрастает (убывает) и не ограничена сверху (снизу), то она имеет бесконечный предел $+\infty$ ($-\infty$).

1.2. Числовой ряд. Основные понятия теории числовых рядов: сходимость, расходимость, сумма ряда. Примеры

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Определение 5. Бесконечным числовым рядом называется выражение вида

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, обозначаемое как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Числа a_1, a_2, a_3, \dots называются

членами (элементами) числового ряда.

Определение 6. Сумма первых n членов ряда называется n -й частичной суммой ряда:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Тогда $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$ и т.д.

Получаем последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \dots: \{S_n\}$.

Таким образом, каждому числовому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно поставить в соответствие

последовательность частичных сумм $\{S_n\}: S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Определение 7. Если существует конечный или бесконечный предел S

последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, то он называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если S конечно ($S < \infty$), то ряд называется *сходящимся*; если $S = \infty$ или S не существует, то ряд называется *расходящимся* и суммы ряд не имеет.

Итак, если дан ряд, то всегда можно поставить вопрос, сходится ли он (иными словами, существует ли конечный предел $\{S_n\}$) или расходится?

Приведём примеры исследования ряда на сходимость и нахождения его суммы.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$ и найти его сумму.

Решение. Обозначим $\frac{1}{n(n+1)} = a_n$ – общий член ряда. Тогда частичная сумма ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}. \text{ Так как } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ то}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \text{ Тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 < \infty, \text{ т.е. ряд сходится и его сумма } S = 1.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = \frac{4}{5} + \frac{4}{21} + \frac{4}{45} + \dots$ и найти его сумму.

Решение. Обозначим $\frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = a_n$ – общий член ряда. Тогда,

частичная сумма ряда $S_n = \frac{4}{5} + \frac{4}{21} + \dots + \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$. Так как

$$\frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}, \text{ то}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{4}{3} - \frac{4n+4}{(2n+1)(2n+3)}, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{4n+4}{(2n+1)(2n+3)}\right) = \frac{4}{3}, \text{ т.е. ряд сходится и его сумма } S = \frac{4}{3}.$$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$

Решение. Обозначим общий член ряда $n = a_n$. Тогда, частичная сумма ряда

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{2} = +\infty, \text{ т.е. сумма ряда}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty \text{ и ряд расходится.}$$

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии.

Решение. Пусть дана геометрическая прогрессия $b, bq, bq^2, bq^3, \dots, bq^{n-1}, \dots$, где q –

знаменатель прогрессии. Ряд $b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ называется

рядом геометрической прогрессии. Обозначим $bq^{n-1} = a_n$ – общий член ряда. При $q \neq 1$ n - частичная сумма этого ряда равна

$$S_n = \frac{b(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b}{1 - q} - \frac{bq^n}{1 - q}.$$

Рассмотрим частные случаи.

–Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q}$, т.е. ряд сходится.

–Если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, т.е. последовательность $\{S_n\}$

расходится, а значит расходится и исследуемый ряд геометрической прогрессии.

–При $q = 1$ ряд имеет вид $b + b + \dots + b + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b$. Тогда $S_n = nb$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$,

т.е. ряд расходится.

–При $b = 1, q = -1$ ряд имеет вид $b - b + b - b + \dots$, тогда $S_1 = 1, S_2 = 0,$

$S_3 = 1, S_4 = 0, \dots, S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0$, т.е. предела последовательности

$\{S_n\} \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ не существует, а значит, искомым ряд расходится.

Таким образом, ряд геометрической прогрессии сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, в остальных случаях ряд расходится.

1.3. Основные свойства сходящихся рядов, необходимый признак сходимости

Пусть дан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Сформулируем его основные свойства.

Свойство 1. Если сходится ряд, полученный из данного ряда отбрасыванием или присоединением конечного числа членов, то сходится и сам данный ряд, и наоборот. Иными словами, отбрасывание или присоединение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Доказательство. Пусть S_n – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, C_k – сумма k отброшенных членов и y_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в сумму S_n и не входящих в сумму C_k .

При достаточно большом n все отброшенные члены будут содержаться в сумме S_n , т.е.

$S_n = C_k + y_{n-k}$ (k – фиксированное число, C_k – const). Тогда, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-k}$,

то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_k + y_{n-k})$, т.е. исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. И

наоборот, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-k}$, т.е. сходится

составленный ряд. Аналогично доказывается сходимость при добавлении к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

конечного числа членов.

Свойство 2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$ (C – константа) также

сходится, причём его сумма равна $C \cdot S$.

Доказательство. Пусть S_n – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, и \overline{S}_n

– частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$, $\overline{S}_n = Ca_1 + Ca_2 + \dots + Ca_n$. Тогда

$$\overline{S}_n = C(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = C \cdot S_n.$$

Отсюда, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сходится), то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_n} = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C \cdot S, \text{ т.е. ряд } \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n \text{ также сходится.}$$

Свойство 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны A и B соответственно,

то их можно почленно складывать (или вычитать), причём ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ также сходятся и их суммы равны $S = A \pm B$.

Доказательство. Пусть A_n , B_n и S_n – частичные суммы этих рядов, тогда

$$S_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) =$$

$= A_n \pm B_n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B.$$

Теорема 1 (необходимый признак сходимости рядов). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится, тогда его общий член a_n стремится к 0 (при $n \rightarrow \infty$) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(обратное не всегда верно).

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S , то для его частичных

сумм S_n , S_{n-1} имеют место равенства $a_n = S_n - S_{n-1}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \text{Что и требовалось доказать.}$$

Условие сходимости, сформулированное в теореме 1, является *необходимым*, но не *достаточным*, т.е. при выполнении условия $a_n \rightarrow 0$ ряд может расходиться. Рассмотрим

пример такого ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, где $\frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$ – общий член ряда. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0. \text{ Частичная сумма ряда имеет вид } S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Очевидно, каждый член этой суммы $\geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, тогда оценка S_n даёт неравенство:

$$S_n \geq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow \infty, \text{ следовательно,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty, \text{ т.е. исходный ряд расходится, хотя } a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Следствие из теоремы 1. Если общий член ряда a_n (при $n \rightarrow \infty$) не стремится к 0, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится (достаточный признак расходимости ряда).}$$

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots$

Решение. Обозначим общий член ряда $\frac{2n-1}{2n} = a_n$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n} \right) = 1 \neq 0, \text{ то из следствия теоремы 1}$$

следует, что ряд расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{1}{n}$. Данный ряд называется гармоническим, так

как каждый его член равен среднему гармоническому двух соседних:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right). \text{ Очевидно неравенство:}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_n = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \text{ Члены гармонического ряда,}$$

начиная с третьего, объединим в группы по 2, 4, 8, 16, ..., 2^{k-1} членов в каждой группе.

Очевидно, сумма каждой группы можно оценить следующим образом: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} \dots, \text{ т.е.}$$

каждая из этих сумм в отдельности больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, для частичных сумм с

номерами $n = 2^k$, $k = 2, 3, \dots$ выполняются неравенства:

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}, \dots,$$

$S_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+k}{2}$, т.е. частичные суммы гармонического ряда неограниченно растут с

увеличением $n = 2^k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = \infty$. Получаем, что

гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.