Лекция 2. Признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши

2.1. Ряды Дирихле и их сходимость, гармонический ряд

Определение 1. Числовой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется *рядом Дирихле* с показателем *p*, $p \in$ R. Заметим, что при $p=1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который называется *гармоническим*.

Пример 1. Исследовать ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ на сходимость в зависимости от *p*.

Решение. 1) В случае, если $p \le 0$, члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ образуют неубывающую последовательность, а сам ряд расходится по необходимому признаку сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$).

2) В случае $p>0$ для исследования сходимости ряда используем интегральный признак Коши. Введём функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $x \ge 1$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы Коши (теорема 3, лекция 1, разд. 1.5): при $p>0$ она непрерывна, положительна и монотонно убывает, $f(n)=\frac{1}{n^p}=a_n$, $n \ge 1$. Вычислим несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x$ в двух случаях а) $0<p<1$, б) $p>1$, т.е. когда $p \ne 1$:

$$\int_1^{\infty} x^{-p} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} x^{-p} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{1-p} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right)$$

–Если $0<p<1$, $1-p>0$, то $n^{1-p} \to \infty$ при $n \to \infty$, тогда

$\int_1^{\infty} x^{-p} \mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right) = \infty$, следовательно, несобственный интеграл расходится и расходится исходный ряд.

–Если $p>1,\ 1-p<0,$ то $n^{1-p}\to 0$ при $n\to\infty$, тогда

$$\int_1^\infty x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}(1-p)}+\frac{1}{p-1}\right)=\frac{1}{p-1}<\infty,$$ следовательно, несобственный интеграл сходится и сходится исходный ряд.

3) В случае $p=1$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, для которого также применим интегральный признак Коши, т.е. рассмотрим интеграл

$$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^n\right)=\lim_{n\to\infty}(\ln n-\ln 1)=\lim_{n\to\infty}\ln n=\infty,$$ следовательно, несобственный интеграл расходится, а значит, гармонический ряд расходится.

Вывод: ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится, если $p>1$, и расходится, если $p\le 1$.

2.2. Признаки сравнения рядов с положительными членами

Рассмотрим некоторые признаки, устанавливающие сходимость или расходимость рядов с положительными членами путём сравнения их с рядами, сходимость или расходимость которых известна.

Теорема 1 (I признак сравнения рядов с положительными членами). Пусть даны 2 ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Если, начиная с некоторого номера *N*, для всех $n\ge N$ выполняется неравенство $a_n\le b_n$, тогда

1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,

2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа членов (свойство 1, лекция 1, разд. 1.3) не влияет на сходимость или расходимость ряда, можно считать, не нарушая общности, что условие $a_n\le b_n$ выполнено для всех $n\ge 1$. Пусть A_n − частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а B_n − частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. По условию

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n.$$

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность $\{B_n\}$ ограничена сверху, а значит, ограничена сверху и последовательность $\{A_n\}$. Следовательно, по теореме 2 (лекция 1, разд. 1.4) о необходимом и достаточном условии сходимости ряда с положительными членами ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, так как существует конечный предел последовательности $\{A_n\}$.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то последовательность $\{A_n\}$ не ограничена, а значит, не ограничена и последовательность $\{B_n\}$. Тогда по теореме 2 (лекция 1, разд. 1.4) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Теорема доказана.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$. Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При $n \ge 2$ $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n} = a_n$, а так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \ldots$.

Решение. Обозначим $\dfrac{1}{k \cdot 2^k} = a_k$. Сравним данный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с рядом

геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = 1$, который

сходится, так как знаменатель прогрессии $q = \dfrac{1}{2}$, то первые члены ряда равны, а при

$k \geq 2$, $a_k < b_k$, значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k \cdot 2^k}$ сходится по I признаку сравнения.

Ответ: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k \cdot 2^k}$ сходится.

Теорема 2 (предельный признак сравнения рядов с положительными членами). Даны 2 ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и пусть существует $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C, \; C \neq 0, \; C \neq \infty$, тогда эти два ряда либо сходятся, либо расходятся одновременно.

Доказательство. Так как по условию $a_n > 0, \; b_n > 0, \; \forall n = 1, 2, 3, \ldots$ и $C = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, то

согласно свойству предела $C \geq 0$. По условию $C \neq 0$, значит, $C > 0$. По определению

предела для всех $\varepsilon > 0$ существует окрестность $(C - \varepsilon, \; C + \varepsilon)$ точки C такая, что $C - \varepsilon > 0$ и существует такое натуральное число N,

зависящее от ε, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $C - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon$, или

$(C - \varepsilon)b_n < a_n < (C + \varepsilon)b_n$.

Если ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n (C + \varepsilon)$ (свойство 2, лекция 1, разд. 1.3), откуда по I признаку сравнения рядов следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, так

как $a_n < (C + \varepsilon)b_n$.

Если же ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n(C-\varepsilon)$, а так как $(C-\varepsilon)b_n < a_n$, то по I признаку сравнения рядов ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ также расходится.

Теорема доказана.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=C$, $C=0$ или $C=\infty$, то предельный признак не применим (теорема 2 в этих случаях не верна).

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+3n}$.

Решение. Обозначим $\dfrac{1}{n^2+3n}=a_n$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+3n}=1\neq 0$ и $\neq\infty$, то эти два ряда одновременно сходятся, или расходятся (теорема 2). Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле с $p=2>1$ сходится, следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+3n}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+3n}$ сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$.

Решение. Обозначим $\dfrac{1}{\ln n}=a_n$. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится. Так как $a_n=\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}=b_n$ $(n>\ln n \quad \forall n\geq 2)$, то по теореме 1 ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ расходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расходится.

2.3. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами

Теорема 3 (признак Даламбера). Пусть дан ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \ (a_n>0)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, тогда:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $l<1$,

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, если $l>1$,

3) если $l=1$, то для выяснения сходимости ряда признак Даламбера не применим.

Доказательство. 1) Пусть предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ существует и $0\le l<1$. Рассмотрим число q такое, что $l<q<1$. Из определения предела следует, что $\forall \varepsilon=q-l>0$ существует $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, начиная с которого $\forall n\ge N=N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<q-l$, $l-q<\frac{a_{n+1}}{a_n}-l<q-l$, $2l-q<\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$.

Таким образом, $\forall n\ge N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, т.е. $a_{n+1}<q\cdot a_n$. Берём $n = N, N+1, N+2,\ldots$, тогда

$a_{N+1}<q\cdot a_N$, $a_{N+2}<qa_{N+1}<q^2a_N$, $a_{N+3}<q\cdot a_{N+2}<q^3a_N$, …, $a_{N+k}<q^ka_N$.

Запишем исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \ (a_n>0)$ в виде:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots$. Рассмотрим новый ряд

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_N\cdot q^k=a_N+qa_N+q^2a_N+\ldots$. Этот ряд есть ряд геометрической прогрессии с $b_1=a_N$ и $0<q<1$, который сходится, а значит, сходится ряд

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{N+k}=a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots$, так как $a_{N+k}<q^ka_N \ (k=1, 2, 3,\ldots)$ на основании теоремы 1. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{N+k}$ получен из исходного $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ отбрасыванием конечного числа

членов $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (свойство 1, лекция 1, разд. 1.3). Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l, \quad l < 1$. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$. Рассмотрим число q такое, что $l > q > 1$. $e = l - q > 0$, из определения предела следует: $-e < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - l < e$, $l - e < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < l + e$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$. Таким образом, $a_{n+1} > a_n > 0$ и при $n \to \infty$ общий член ряда a_n не стремится к 0, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда (теорема 1, лекция 1, разд. 1.3). Вторая часть теоремы доказана.

3) Если $l = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ равен единице или не существует, в этом случае для выяснения сходимости ряда признак Даламбера не применим.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

Решение. Обозначим $\dfrac{n}{2^n} = a_n$, $a_n > 0$; найдём $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$. Составим предел

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\cdot 2^n}{2^n \cdot 2 \cdot n} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{2} < 1$, т.е. по признаку Даламбера ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n}$.

Решение. Обозначим $\frac{n!}{5^n}=a_n, a_n>0$; найдём $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$. Составим предел

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot 5^n}{5^n\cdot 5\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty>1,$$

т.е. по признаку Даламбера ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$ расходится.

2.4. Радикальный признак Коши сходимости рядов с положительными членами

Теорема 4 (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ и пусть существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$ Тогда:

1) если $l<1$, ряд сходится,
2) если $l>1$, ряд расходится,
3) если $l=1$, то для выяснения сходимости ряда радикальный признак Коши не применим.

Доказательство. 1) Пусть существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l<1$; так как $a_n>0$, то $l\geq 0$.

Рассмотрим число q такое, что $l<q<1$. Из определения предела следует, что $\forall\text{е}=q-l>0$ существует $N=N(\text{е})\in\text{N}$, начиная с которого $\forall n\geq N$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n}-l\right|<q-l,\ l-q<\sqrt[n]{a_n}-l<q-l,\ \sqrt[n]{a_n}<q,\ a_n<q^n\ \ \forall n\geq N$.

Распишем исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots \quad . \tag{1}$$

Составим новый ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^{N+k}=q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+\ldots\ . \tag{2}$$

Ряд (2) представляет собой ряд геометрической прогрессии со знаменателем q : $0 \le q < 1$, т.е. этот ряд сходится, а значит, ряд (1) сходится по I признаку сравнения рядов (теорема 1 данной лекции).

2) Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$. Начиная с некоторого $N = N(\mathrm{e}) \in \mathrm{N}$ $\forall n \ge N$, $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, тогда исходный ряд расходится по необходимому признаку сходимости (теорема 1, лекция 1, разд. 1.3).

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l = 1$ (или не существует), то для выяснения сходимости ряда радикальный признак Коши не применим. Теорема доказана.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1} \right)^n$

Решение. Обозначим $\left(\dfrac{n}{2n+1} \right)^n = a_n$, $a_n > 0$. Составим предел:

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$, т.е. по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1} \right)^n$ сходится.

2.5. Знакопостоянные ряды, ряды с положительными членами

Установление сходимости или расходимости числового ряда − основной вопрос теории рядов; нахождение суммы ряда в случае его сходимости – второстепенная задача. Вопрос сходимости проще всего решается для знакопостоянных рядов, когда все члены ряда одного знака. Для определённости будем рассматривать ряды с положительными ($a_n > 0$) или с неотрицательными членами ($a_n \ge 0$). Характерным свойством таких рядов является монотонное возрастание (не убывание) последовательности частичных сумм:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0, \;\; S_n = S_{n-1} + a_n > S_{n-1}; \;\; S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots .$$

Ряд с положительными членами всегда имеет сумму; если эта сумма конечна, то ряд сходится.

Выяснение сходимости рядов с положительными членами опирается на признаки сходимости, которые являются либо необходимыми, либо достаточными, либо необходимыми и достаточными. В частности, к таким рядам применим приведенный выше необходимый признак сходимости рядов (теорема 1). Существует признак, являющийся необходимым и достаточным, который устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Для сходимости ряда с положительными членами *необходимо и достаточно,* чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Доказательство (необходимость). Пусть ряд сходится, тогда последовательность его частичных сумм сходится, а значит, она ограничена сверху.

Доказательство (достаточность). Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел, т.е.соответствующий ряд сходится (теорема Вейерштрасса для числовых

последовательностей). Теорема доказана.

Следует отметить, что на практике этот признак трудно применим, хотя и представляет собой большой теоретический интерес.

Далее рассматриваются некоторые признаки сходимости рядов с положительными членами, удобные для практического применения, которые являются только достаточными признаками (интегральный и радикальный признаки Коши, признаки сравнения, признак Даламбера).

1.5. Интегральный признак Коши сходимости ряда с положительными членами

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого удовлетворяют трём условиям:

а) $a_n > 0,\ n \geq 1$, т.е. исходный ряд с положительными членами;

б) члены ряда монотонно убывают, т.е. $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n > \ldots > 0$;

в) общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пусть существует непрерывная, монотонно убывающая, определённая при $x \ge 1$ функция $f(x)$, такая что $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots;\ f(n) = a_n,\ \ldots$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Тогда, если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится; если указанный интеграл расходится, то этот ряд расходится.

Доказательство. Из условий теоремы $f(n) = a_n > 0$ следует $f(x) > 0$ при $x \ge 1$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = f(x),\ x = 1$, $x = n+1$ и осью $0x$ (рис.1). Разобьём отрезок $[1; n+1]$

точками $x = k\ \ (k = 1, 2, \ldots, n+1)$ и рассмотрим n криволинейных трапеций.

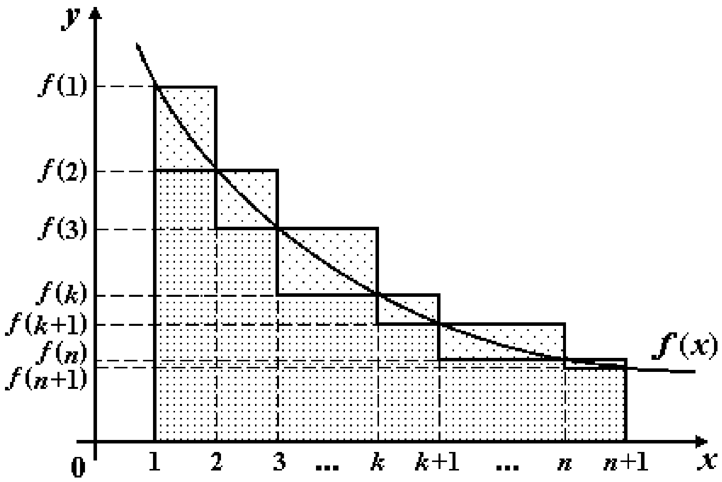

Рис. 1. Площадь криволинейной трапеции

Из геометрического смысла интеграла площадь криволинейной

трапеции $S_{\text{тр}} = \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Заменим эту площадь суммой площадей n

прямоугольников с единичными основаниями:

$$S' = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),\ \ S'' = f(2) + f(3) + \ldots + f(n+1),$$

причём $S' = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$, а $S'' = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_1 = S_{n+1} - a_1$.

Из графика (рис. 1) следует: $S'' < S_{\text{тр}} < S'$, т.е.

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x > S_{n+1} - a_1,\ \forall n = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, т.е. имеет конечный предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = A$. Так как $\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$, то

$(S_{n+1} - a_1) \le \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = A$ и $S_{n+1} \le \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + a_1 = A + a_1$.

Итак, частичные суммы ряда ограничены $\forall n \in \mathrm{N}$, тогда по теореме 2 (необходимый и достаточный признак сходимости ряда с положительными членами) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = S < \infty$.

2) Пусть интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ расходится, т.е. $\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$. Тогда из неравенства $S_n > \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ следует, что последовательность $\{S_n\}$ неограниченно возрастает: $S_n \to \infty$, т.е. ряд расходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема остаётся верной и тогда, когда её условия выполняются не для всех членов ряда, а лишь начиная с *k*-го ($n \ge k$), в таком случае рассматривается интеграл $\int_k^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Замечание 2. Интегральный признак Коши существенно облегчает исследование сходимости ряда, так как позволяет свести этот вопрос к выяснению сходимости интеграла от удачно подобранной соответствующей функции $f(x)$, что легко выполняется, применяя методы интегрального исчисления.