

Занятие 5. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды: признак Лейбница, исследование на абсолютную и условную сходимость.

Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 1) $u_n > u_{n+1}$ и 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится. **Знакопеременные ряды (u_n имеет произвольный знак).** Знакопеременный ряд **абсолютно сходится**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, а знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то знакочередующийся ряд **сходится условно**. Если ряд из абсолютных величин и знакопеременный ряд расходятся, то исследуемый ряд расходится.

В первую очередь ряд исследуется на абсолютную сходимость.

Примеры.

Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}}$.

Решение. Записываем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Это обобщенный гармонический ряд с показателем степени $s = \frac{4}{3} > 1$, который сходится.

Следовательно, заданный ряд сходится абсолютно.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-1}$.

Решение. Записываем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}.$$

Применим первый признак сравнения, взяв в качестве ряда сравнения расходящийся гармонический ряд: $\frac{1}{3n-1} < \frac{1}{n} \quad \forall n$. Отсюда ряд из абсолютных величин расходится.

Абсолютной сходимости нет. Исследуем ряд на условную сходимость, используя признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Условия признака Лейбница:

$$1) u_n > u_{n+1} \text{ и } 2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

В нашем случае $u_n = \frac{1}{3n-1}$. 1) $\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \frac{1}{11} > \dots$; первое условие выполнено.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-1} = 0$. Второе условие признака Лейбница выполняется. Ряд сходится условно.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}.$$

Решение. Записываем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{5n-2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n-2}.$$

Для получившегося ряда не выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n:n}{(5n-2):n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Ряд из абсолютных величин расходится, абсолютной сходимости нет. Но необходимый признак сходимости входит вторым условием в признак Лейбница и не выполняется. Условной сходимости ряда нет. Данный ряд расходится.

Задачи.

Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакпеременные ряды.

$$1. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad 2. 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \quad 5. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{5^n} \quad 6. \frac{1}{10} - \frac{7}{10^2} + \frac{13}{10^3} - \frac{19}{10^4} + \frac{25}{10^5} - \frac{31}{10^6} + \dots$$

$$7. \frac{2}{2^3+1} - \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} - \frac{5}{5^3+1} + \dots \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!} \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(-5)^{2n}+1}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{9n^2 - 6n + 10}.$$

Дополнительные задачи.

11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right]^\alpha$.

12. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \frac{(-1)^n}{3^n} \right]$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакпеременные ряды.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n!}$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. 15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2}$. 16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2^{n(n-1)}} \frac{1}{5^n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n!)^2}$. 18. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \ln n}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n(3n-1)}$.