Занятие 6. Степенные ряды.

Ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называется **степенным**, a_i – коэффициенты ряда. Ряд при некоторых значениях x сходится, а при других – расходится. Множество значений переменной x, при которых степенной ряд сходится, называется его *областью сходимости*. Область сходимости представляет собой интервал числовой прямой $|x - a| < R$, внутри которого степенной ряд сходится **абсолютно**. R – радиус сходимости. **Интервал сходимости** степенного ряда находят с помощью признаков Даламбера или Коши из неравенств $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} < 1$ где $u_n = a_n(x - x_0)^n$.

Примеры. Определить интервалы сходимости степенных рядов и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^{2n-1}}{n \cdot 5^n}$

Решение. Используем признак Даламбера: $|u_n| = \frac{|x-3|^{2n-1}}{n \cdot 5^n}$, $|u_{n+1}| = \frac{|x-3|^{2n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^{2n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}} \cdot \frac{n\cdot 5^n}{|x-3|^{2n-1}} = = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^2 \cdot n}{(n+1)\cdot 5} = \frac{|x-3|^2}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)} =$$

$= \frac{|x-3|^2}{5} < 1$. $|x-3|^2 < 5$, $|x-3| < \sqrt{5}$, $3-\sqrt{5} < x < 3+\sqrt{5}$, отсюда $(3-\sqrt{5}; 3+\sqrt{5})$ – интервал абсолютной сходимости степенного ряда. Изучим сходимость ряда на концах интервала: $x = 3+\sqrt{5}$; получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{5})^{2n-1}}{n\cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{5}}$. Исследование на абсолютную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{5}}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{5}}$. Из неравенства $\frac{1}{n\cdot\sqrt{5}} < \frac{1}{n}$ по первому признаку сравнения полученный ряд расходится (ряд сравнения – расходящийся гармонический ряд). Абсолютной сходимости нет. Условная сходимость знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt{5}}$ имеет место, т.к. выполняются условия признака Лейбница: 1) $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{2\sqrt{5}} > \frac{1}{3\sqrt{5}} > \dots$; 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{5}} = 0$. На другом конце интервала сходимости $x = 3 - \sqrt{5}$ получаем числовой ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 5^n}$, результаты исследования сходимости которого аналогичны полученным на правом конце интервала. Таким образом, степенной ряд сходится на отрезке $[3-\sqrt{5}; 3+\sqrt{5}]$, причем на интервале $(3-\sqrt{5}; 3+\sqrt{5})$ – абсолютно, а на концах $x = 3 \pm \sqrt{5}$ – условно.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение. Используем признак Даламбера: $|u_n| = \frac{|x|^n}{n!}$, $|u_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \ = \frac{|x|^n |x|}{n!(n+1)}$.

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1$ для любых x. Поэтому ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой $(-\infty; \infty)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-5)^n$.

Решение. Используем признак Даламбера:

$|u_n| = n!|2x-5|^n$, $|u_{n+1}| = (n+1)!|2x-5|^{n+1} = n!(n+1)|2x-5|^n |2x-5|$.

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|2x-5| = \infty > 1$ для любых x. Поэтому ряд расходится для всех x, кроме $x = \frac{5}{2}$.

Задачи.

Определить интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

1. $1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 5^3} + \dots$. 2. $\frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \dots$.

3. $x+(2x)^2+(3x)^3+(4x)^4+\ldots$. 4. $\frac{3x+2}{1}+\frac{(3x+2)^2}{4}+\frac{(3x+2)^3}{7}+\ldots$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{7^n}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(x-1)^n}{n!}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-e)^n$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n}}{n(2^n+1)}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n}}{n^2}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n-1}}{n\cdot 7^n}$.

Дополнительные задачи.

11. Определить интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$ и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 1.

Определить интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

12. $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots$. 13. $5x+\frac{(5x)^2}{2!}+\frac{(5x)^3}{3!}+\ldots$. 14. $\frac{2x-3}{1}+\frac{(2x-3)^2}{3}+\frac{(2x-3)^3}{5}+\ldots$. 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!x^n}{n\cdot(n!)^2}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n-1}}{n^4}$. 18. $\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)\cdot 4^n}$.

20. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-1)^3}{2^3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{(x-1)^4}{2^4}+\ldots$.