Занятие 7. Степенные ряды. Приложения степенных рядов: разложение функций в степенные ряды.

Ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+.....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+... \quad .$$

Ряд Маклорена получается из ряда Тейлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \quad .$$

Разложения в ряд Маклорена элементарных функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \quad (-\infty<x<+\infty).$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+... \quad (-\infty<x<+\infty).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ ...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+... \quad (-\infty<x<+\infty).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+... \quad (-1<x\le 1).$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+... \quad -1\le x\le 1.$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (-1<x<1).$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \quad (-1<x<1).$$

Примеры. 1. Разложить функцию $y=\cos^2 x$ в ряд Маклорена и найти интервал сходимости ряда.

Решение. Продифференцируем функцию n раз:

$$y=\cos^2 x\,,\; y'=-2\sin x\cos x=-\sin 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-2\cos 2x=2\cos(2x+\pi),\quad y'''=2^2\sin 2x=2^2\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV}=2^3\cos 2x=2^3\cos(2x+2\pi),\;\dots\;,\quad y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

При $x=0$ $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=0$, $y^{IV}(0)=2^3$, $y^{V}(0)=0$, $y^{VI}(0)=-2^5, \dots$. Отсюда

$$\cos^2 x=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\dots+\frac{(-1)^n\,2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\dots\,.$$

Для нахождения интервала сходимости полученного ряда используем признак Даламбера:

$$|u_n|=\frac{2^{n-1}}{(2n)!}|x|^{2n},\; |u_{n+1}|=\frac{2^n}{(2n+2)!}|x|^{2n+2}=\frac{2^{n-1}\cdot 2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}|x|^{2n}|x|^2;$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2|x|^2}{(2n+1)(2n+2)}=0<1$ для любых x. Интервал абсолютной сходимости ряда $(-\infty;\,\infty)$.

Другим способом является применение разложения в степенной ряд косинуса с заменой аргумента x на $2x$. Используем равенство $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\dots\right)=$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\dots+\frac{(-1)^n\,2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\dots\,.$$

2. Разложить в ряд Тейлора функцию $y=\dfrac{1}{x}$ по степенях $x+3$.

Решение. Продифференцируем функцию n раз:

$$y'=-\frac{1}{x^2},\; y''=\frac{2}{x^3},\; y'''=-\frac{2\cdot 3}{x^4},\; y^{IV}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5},\;\dots\;,\; y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

При $x=3$ $y(-3)=-\frac{1}{3}$, $y'(-3)=-\frac{1}{3^2}$, $y''(-3)=-\frac{2}{3^3}$, $y'''(-3)=-\frac{2\cdot 3}{3^4}$,

$y^{IV}(-3)=-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3^5}$, … , $y^{(n)}(-3)=-\frac{n!}{3^{n+1}}$. Отсюда

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}-\frac{x+3}{3^2}-\frac{(x+3)^2}{3^3}-\frac{(x+3)^3}{3^4}-\ldots-\frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}-\ldots .$$

Для нахождения интервала сходимости полученного ряда используем признак Даламбера:

$$|u_n|=\frac{|x+3|^n}{3^{n+1}},\ |u_{n+1}|=\frac{|x+3|^{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{|x+3|^n|x+3|}{3^{n+1}\cdot 3};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x+3|}{3}<1.$$

Отсюда $|x+3|<3$ и $-6<x<0$. Интервал абсолютной сходимости $(-6;0)$. На концах ряд расходится.

Второй способ. Используем разложение в степенной ряд функции $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{3-(x+3)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+3}{3}}=-\frac{1}{3}\left[1+\frac{x+3}{3}+\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+\left(\frac{x+3}{3}\right)^3+\ldots\right].$$

Раскрыв скобки, получаем исходный ряд.

Задачи.

Разложить функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости рядов.

1. $f(x)=\ln(3+2x)$. 2. $f(x)=\sin 3x$. 3. $f(x)=\frac{1}{1-2x}$. 4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$.

5. $f(x)=5^x$. 6. $f(x)=x\sqrt{x}$.

Разложить функции в ряд Тейлора в окрестностях указанной точки.

7. $f(x)=\frac{1}{5+x}$; $x=2$. 8. $f(x)=e^x$; $x=-5$. 9. $f(x)=\frac{1}{x^2+3x=2}$; $x=-4$.

Дополнительные задачи.

10. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\dfrac{1+2x}{1-2x}$ и найти интервал сходимости ряда.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 3.

Разложить функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости рядов.

11. $f(x) = e^{x^2}$. 12. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$. 13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. 14. $f(x) = \ln(5+x)$.

15. $f(x) = \arcsin x$. 16. $f(x) = \dfrac{1}{x} arctg\, 2x$.

Разложить функции в ряд Тейлора в окрестностях указанной точки.

17. $f(x) = \cos x$; $x = \dfrac{\pi}{2}$. 18. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x = 1$. 19. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $x = -1$.

20. $f(x) = \dfrac{x}{4+x^2}$; $x = 1$.