

Занятие 8. Приложения степенных рядов: приближенные вычисления.

Разложения в ряд Маклорена элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1).$$

Примеры. Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции с заданной точностью ε .

1. $\sqrt[4]{19}$; $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Находим ближайшее к 19 число, из которого извлекается корень четвертой степени. Это число 16:

$$\sqrt[4]{19} = \sqrt[4]{16+3} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{3}{16}\right)} = 2\left(1+\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Используем разложение в степенной ряд функции $(1+x)^m$ при $x = \frac{3}{16}$ и $m = \frac{1}{4}$:

$$\sqrt[4]{19} = 2\left(1+\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{256} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 2 \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{27}{4096} + \dots \right) =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{3}{64} - \frac{27}{8192} + \frac{405}{1572864} + \dots \right).$$

Четвертый член разложения меньше заданной точности и при переходе к десятичным дробям отбрасываем его и все последующие члены. В десятичных дробях сохраняем на один знак после запятой больше, чем знаков в заданной точности $\varepsilon = 0,001$:

$$\sqrt[4]{19} \approx 2(1 + 0,0469 - 0,0033) = 2 \cdot 1,0436 = 2,0872 \approx 2,087.$$

В ответе сохраняем три знака как в заданной точности.

2. $\ln 1,04$; $\varepsilon = 0,0001$.

Решение. Воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$ в ряд:

$$\ln 1,04 = \ln(1 + 0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \dots = 0,04 - 0,0008 +$$

$$+ 0,00002 + \dots \approx 0,04 - 0,00080 = 0,0382. \text{ Отбрасываем все члены разложения,}$$

начиная с третьего, т.к. $0,00002 < 0,0001$.

3. $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$; $\varepsilon = 0,001$.

Решение.

$$\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^{0,1} \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} dx = \int_0^{0,1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{0,1} x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^n}{n} \Big|_0^{0,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,1)^n}{n \cdot n!} = 0,1 + \frac{0,01}{2 \cdot 2} + \frac{0,001}{3 \cdot 6} + \dots = 0,1 + 0,0025 +$$

$$+ 0,00006 \approx 0,1 + 0,0025 = 0,1025 \approx 0,103.$$

Задачи.

Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции с заданной точностью ε .

1. \sqrt{e} ; $\varepsilon = 0,001$. 2. $\cos 18^\circ$; $\varepsilon = 0,001$. 3. $\sqrt[5]{1,1}$; $\varepsilon = 0,001$. 4. $\ln 0,98$; $\varepsilon = 0,0001$.

5. $\sqrt[3]{65}$; $\varepsilon = 0,001$. 6. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$; $\varepsilon = 0,001$. 7. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; $\varepsilon = 0,001$.

8. $\int_0^{0,8} x^{10} \cos x dx$; $\varepsilon = 0,001$. 9. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$; $\varepsilon = 0,001$

Дополнительные задачи.

10. Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции $\operatorname{arctg} 1,1$ с заданной точностью $\varepsilon = 0,001$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. III, пар. 3.

Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение функции с заданной точностью ε .

11. $\ln 0,5$; $\varepsilon = 0,001$. 12. $\sqrt[3]{150}$; $\varepsilon = 0,001$. 13. $\sqrt[3]{e}$; $\varepsilon = 0,0001$. 14. $\sin 80^\circ$;

$\varepsilon = 0,001$. 15. $\operatorname{arctg} 0,9$; $\varepsilon = 0,0001$. 16. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$; $\varepsilon = 0,001$. 17. $\int_0^1 \sin x^3 dx$;

$\varepsilon = 0,001$. 18. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$; $\varepsilon = 0,001$. 19. $\int_0^{1/9} \sqrt{x} e^x dx$; $\varepsilon = 0,001$.

20. $\int_0^{1/8} \sqrt{1-x^2} dx$; $\varepsilon = 0,001$.