Лекция 3. Знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

3.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение 1. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$,

где $a_n > 0$, называется *знакочередующимся рядом.*

Для установления сходимости таких рядов существует достаточный признак сходимости, называемый признаком Лейбница.

Теорема 1 (признак Лейбница). Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ удовлетворяет условиям:

1) $u_n = (-1)^{n-1}\cdot a_n,\ a_n > 0$, т.е. этот ряд знакочередующийся;

2) члены этого ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots$ т.е. $a_n > a_{n+1},\ n = 1,2,\ldots$;

3) общий член ряда a_n стремится к 0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится и его сумма $S \le a_1$.

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим частичную сумму чётного порядка $S_n = S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m}$ и запишем её в виде:
$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$. В силу условия 2) теоремы 1 все выражения в скобках положительны, тогда сумма $S_{2m} > 0$ и последовательность $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастает:
$0 < S_2 < S_4 < S_6 < \ldots < S_{2m} < \ldots$.

Теперь запишем эту сумму иначе:
$S_{2m} = a_1 - (a_3 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots . - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$.

В последнем выражении каждое из выражений в скобках положительно, поэтому $S_{2m} < a_1$, из чего следует, что последовательность $\{S_n\} = \{S_{2m}\}$ является ограниченной, и так как она монотонно возрастает, то она сходится. Другими словами существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причём $S \le a_1$.

2) Рассмотрим частичную сумму нечётного порядка $S_n = S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, которая положительна. Можно показать, что последовательность $\{S_{2m+1}\}$ монотонно возрастает, так как монотонно возрастает последовательность $\{S_{2m}\}$ и $a_{2m+1} > 0$. Запишем выражение для $\{S_{2m+1}\}$ в виде: $S_{2m+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - .... - (a_{2m} - a_{2m+1})$, так как все выражения в скобках положительны, то $S_{2m+1} \le a_1$. По условию 3) теоремы 1 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, откуда

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S.$$

Итак, при всех *n* (чётных или нечётных), $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \le a_1$, следовательно, исходный ряд сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Признак Лейбница можно также применять к рядам, для которых условия теоремы выполняются с некоторого номера $N \in \mathrm{N}$.

Замечание 2. Условие 2) теоремы 1 (признак Лейбница) о монотонности членов ряда существенно.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$.

Решение. Обозначим $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = u_n$. К данному ряду применим признак Лейбница. Проверим выполнение условий теоремы 1: условие 1) ряд знакочередующийся $a_n = \dfrac{1}{n}$, $u_n = (-1)^{n-1} \cdot a_n$, $a_n > 0$; условие 2) выполнено:

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$; условие 3) также выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Следовательно, по признаку Лейбница данный ряд сходится, причем его сумма $S \le a_1 = 1$.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится.

3.2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого имеют произвольные знаки (+), (−), называется *знакопеременным рядом*. Рассмотренные выше знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременного ряда; понятно, что не всякий знакопеременный ряд является знакочередующимся. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots$ − знакопеременный, но не являющийся знакочередующимся рядом.

Отметим, что в знакопеременном ряде членов как со знаком (+), так и со знаком (−) бесконечно много. Если это не выполняется, например, ряд содержит конечное число отрицательных членов, то их можно отбросить и рассматривать ряд, составленный только из положительных членов, и наоборот.

Определение 1. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, а частичная сумма равна S_n, то $r_n = S - S_n$ называется *остатком ряда*, причём $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0$, т.е. остаток сходящегося ряда стремится к 0.

Рассмотрим сходящийся знакочередующийся ряд как частный случай знакопеременного ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$, где $a_n > 0$. Запишем его в виде $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_n + r_n$, тогда по признаку Лейбница $|r_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$; так как $S_n \to S$, то $r_n \to 0$, т.е. остаток сходящегося ряда стремится к 0.

Для знакопеременных рядов вводятся понятия абсолютной и условной сходимости.

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся абсолютно*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Определение 3. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то исходный ряд называется *условно* (*неабсолютно*) *сходящимся*.

Теорема 2 (достаточный признак сходимости знакопеременных рядов).

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, причём абсолютно, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Доказательство. Обозначим через S_n частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$:

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$, а через σ_n – частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$:

$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n|$. Обозначим через S_n' сумму всех положительных членов, а через S_n'' сумму абсолютных величин всех отрицательных членов, входящих в S_n. Очевидно, что $S_n = S_n' - S_n''$, $\sigma_n = S_n' + S_n''$.

По условию теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится, тогда существует $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$, и так как последовательность $\sigma_n = S_n' + S_n''$ – монотонно возрастающая и неотрицательная, то $\sigma_n \le \sigma$. Очевидно, что $S_n' \le \sigma$, $S_n'' \le \sigma$, тогда последовательности $\{S_n'\}$ и $\{S_n''\}$ являются монотонно возрастающими и ограниченными, причем их пределы равны $\lim_{n\to\infty} S_n' = S'$ и $\lim_{n\to\infty} S_n'' = S''$. Тогда $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n' - S_n'') = \lim_{n\to\infty} S_n' - \lim_{n\to\infty} S_n'' = S' - S'' = S$. Значит, исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и сходится абсолютно. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 даёт только достаточное условие сходимости знакопеременных рядов. Обратная теорема неверна, т.е. если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то не обязательно, что сходится ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (он может быть как сходящимся, так и расходящимся). Например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится по признаку Лейбница (см. пример 1 данной лекции), а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится.

Пример 2. Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 9^n}{n!}.$$

Решение. Данный ряд является знакопеременным, общий член которого обозначим: $\frac{(-1)^n \cdot 9^n}{n!} = u_n$. Составим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n!}$ и применим к нему признак Даламбера. Составим предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, где $a_n = \frac{9^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}$. Проведя преобразования, получаем $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9^n\cdot 9\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1} = 0$. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n!}$ сходится, а значит, исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 9^n}{n!}$ абсолютно сходится.

Пример 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$.

Решение. А) Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Обозначим $\frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1} = u_n$ и составим ряд из абсолютных величин $a_n = |u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ с положительными членами, к которому применяем предельный признак сравнения рядов (теорема 2, лекция 2, разд. 2.2). Для сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ рассмотрим ряд, который имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд является рядом Дирихле с показателем

$p=\dfrac{1}{2}<1$, т.е. он расходится. Составим и вычислим следующий предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$. Так как предел существует, не равен 0 и не равен ∞, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ ведут себя одинаково. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ расходится, а значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Б) Далее исследуем исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+1}$ на условную сходимость. Для этого проверим выполнение условий признака Лейбница (теорема 1, разд. 3.1). Условие 1): $u_n=(-1)^n\cdot a_n$, где $a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}>0$, т.е. этот ряд знакочередующийся. Для проверки условия 2) о монотонном убывании членов ряда используем следующий метод. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, определенную при $x\in[0;+\infty)$ (функция такова, что при $x=n$ имеем $f(n)=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}=a_n$). Для исследования этой функции на монотонность найдём её производную: $f'(x)=\dfrac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$. Эта производная $f'(x)<0$при $x>1$. Следовательно, функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ монотонно убывает при указанных значениях *x*. Полагая $x=n<n+1$, получаем $f(n)=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}=a_n>f(n+1)=a_{n+1}$, где $n=1,2,3,4,\dots$. Это означает, чтоусловие 2) выполнено. Для проверки условия 3) находим предел общего члена a_n: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$, т.е. третье условие выполняется. Таким образом, для исходного ряда выполнены все условия признака Лейбница, т.е. он сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$ условно сходится.

3.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Свойство 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он абсолютно сходится при любой перестановке его членов, при этом сумма ряда не зависит от порядка расположения членов. Если S' − сумма всех его положительных членов, а S'' − сумма всех абсолютных величин отрицательных членов, то сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равна $S = S' - S''$.

Свойство 2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится и $C = \mathrm{const}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C \cdot u_n$ также абсолютно сходится.

Свойство 3. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ также абсолютно сходятся.

***Свойство 4* (*теорема Римана*)**. Если ряд условно сходится, то какое бы мы не взяли число *A*, можно переставить члены данного ряда так, чтобы его сумма оказалась в точности равной *A*; более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы после этого он расходился.