3К-19

Тема: Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.

$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + \dots$ (1) знакопеременный

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (2)

знакочередующийся

$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4$

$(-1)^n$

(1) и (2)

1) $|a_n|$ - положит. ряд. Исследуем если ряд $|a_n|$ сх-ся, то (1) и (2) сх-ся абсолютно

2) $|a_n|$ расх-ся, то применяем пр. Лейбница:

а) $a_n > a_{n+1}$ б) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

3) Если по пр. Лейбница ряд сх-ся, то (1) и (2) условно сх-ся

4) Если по пр. Лейбница ряд расх-ся, то (1) и (2) расх-ся.

Пример 1) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \leftarrow a_n \rightarrow \text{абс. сх-ся}$$

1. $|a_n| = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{4/3}}$ исслед-ем. $\frac{1}{x^p} = \begin{cases} p>1 \text{ с} \\ p\leq 1 \text{ р} \end{cases}$

т.к. $4/3 > 1$, то ряд сх-ся. (это обобщенный гармонич. ряд)

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-1} \text{ — условно сх-ся.}$$

1. $|a_n| = \frac{1}{3n-1}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$ (расх-ся, гарм р)

~~условие~~ расх-ся $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{3}$

$\neq 0$ выполн.

2. пр. Лейбница

а) $a_n > a_{n+1}$ $\quad \frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n+2}$ ✓

$a_{n+1} = \frac{1}{3(n+1)-1} = \frac{1}{3n+2}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} = 0$ ряд. $|a_n|$ сх-ся

Пример 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$ расх-ся

1. $|a_n| = \frac{n}{5n-2}$ Применим Необх. признак $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то р. расх

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{5n-2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{5} \neq 0$ р. расх-ся ✓

2. пр. Лейбница

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{5n-2} \neq 0$

ряд. расх-ся ✓

4. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ $|a_n| =$

усл. сх-ся

5. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$ $|a_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$

абс. сх-ся

$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{2^n}}{2}}{\cancel{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

р. сх-ся

6. $\frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} - \frac{5}{5^3+1} - \ldots$

абс. сх-ся

$|a_n| = \frac{n+1}{(n+1)^3+1}$ $\quad$ пр. сравнение

$b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ сх-ся

сх-ся

$2 > 1$

усл-ие

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^2}{(n+1)^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1 \neq 0$ випол.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n(3n-1)}$ усл. сх-ся

$$|a_n| = \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$$ интегр. пр.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{d\ln(x+1)}{\sqrt{\ln(x+1)}} = \{\ln(x+1)=t\} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{\ln(x+1)}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{\ln(b+1)} -\right.$$

$$\left. - 2\sqrt{\ln 2}\right) = \infty - 2\sqrt{\ln 2} = \infty$$ расх-ся

пр. Лейбница

а) $a_n > a_{n+1}$ $\quad a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} > a_2 = \frac{1}{3\sqrt{\ln 3}}$$ выпол-ся.

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$ выпол-ся.

сх-ся

Д/з. мудл. Занятие 5

задачи для с/р 13, 14, 15, 21