Степенные ряды

3к-19

Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (1)$$

наз-ся степенным, a_i - коэф-ты ряда степенной ряд, разложенный по степеням $(x-x_0)$

Если $\underline{x_0=0}$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

Множество значений переменной x, при которых степенной ряд (1), (2) сх-ся, называется его областью сходимости

Область сходимости представляет собой интервал числовой прямой, для ряда (1)

$$\boxed{|x-x_0| < R} \to -R < x-x_0 < R \to$$

$$\underline{-R+x_0 < x < R+x_0}$$ - область сх-ти ряда (1)

для ряда (2): $\boxed{|x| < R}$ $\quad \underline{-R < x < R}$

R - радиус сходимости, внутри которого степенной ряд (1), (2) сх-ся абсолютно

Интервал сходимости степенного ряда находят с помощью:

1) признака Д'аламбера, из условия

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \qquad \left[\begin{array}{l} u_n = a_n(x-x_0)^n \\ u_n = a_n x^n \end{array}\right]$$

2) признака Коши

$$\left|\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}\right| < 1$$

Замечание 1. Если $R=0$, то ряд (1) сх-ся в точке $x=x_0$, ряд (2) в точке $x=0$

2. Если $R=\infty$, то ряды (1) и (2) сх-ся на всей числовой оси $-\infty < x < \infty$

3. Если R - конечное число ($\neq 0$) то область сх-ти $-R+x_0 < x < R+x_0$ ($-R < x < R$) и надо дополнительно исследовать на концах интервала

примеры:

1. $x+(2x)^2+(3x)^3+\dots$ $\quad u_n=(nx)^n$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(nx)^n}\right|<1 \qquad \left|\lim_{n\to\infty} nx\right|<1$$

$$|x|\lim_{n\to\infty} n<1 \longrightarrow |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n}=R$$

$$|x|<0 \qquad R=0$$

обл-ть сх-ти $x=0$ (т.е. ряд сх-ся только в одной точке $x=0$)

2. $\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{(x+1)^3}{3!}+\dots$

$$u_n=\frac{(x+1)^n}{n!} \qquad u_{n+1}=\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1 \qquad \left|\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(x+1)}^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(x+1)^n}}\right|<1$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{(x+1)}{n+1}\right|<1 \qquad |x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}<1$$

$$|x+1|<\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}}_{=0}}=\infty \qquad R=\infty$$

Следов., ряд сх-ся $-\infty<x<\infty$

3. $\frac{(x-2)}{1\cdot 4^0}+\frac{(x-2)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x-2)^3}{3\cdot 4^2}+\dots$

$u_n=\frac{(x-2)^n}{n\cdot 4^{n-1}}$ $\qquad u_{n+1}=\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)4^n}$

$\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{(x-2)}^{n+1}}{(n+1)\cancel{4^n}}\cdot\frac{n\cancel{4^n}\cdot 4^{-1}}{\cancel{(x-2)^n}}\right|<1$

$|x-2|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}<1 \qquad \frac{|x-2|}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n'}{(n+1)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

$\frac{|x-2|}{4}<1 \qquad |x-2|<4$

$-4<x-2<4 \qquad -2\le x<6$ область сх-ти

$x=-2 \qquad u_n=\frac{(x-2)^n}{n4^{n-1}}=\frac{(-4)^n}{n4^{n-1}}=\frac{(-1)^n\cdot\cancel{4^n}}{n\cancel{4^n}\cdot 4^{-1}}=$

$=\frac{4(-1)^n}{n}$ иссл-ем. - усл сх-ие

1. $|u_n|=\frac{4}{n}$ - расх-ся, т.к. гармон.

2. пр. Лейбница: а) $u_n\geq u_{n+1}$ $\qquad \frac{4}{n}>\frac{4}{n+1}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0 \to \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$ р. сх-ся

$x=6$ $\quad u_n=\dfrac{\cancel{4^n}}{n\cancel{4^n}\cdot 4^{-1}}=\dfrac{4}{n}$ – расх-ся

Ответ обл-ть сх-ти ряда
$-2\le x<6$

4. $\dfrac{x^3}{10}+\dfrac{x^6}{10^2}+\dfrac{x^9}{10^3}+\dots$ $\quad u_n=\dfrac{x^{3n}}{10^n}$

$\left|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{x^{3n}}{10^n}}\right|<1$ $\quad \left|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^3}{10}\right|<1$

$\left|\dfrac{x^3}{10}\right|<1$ $\quad |x^3|<10$

$-10<x^3<10$ $\quad -\sqrt[3]{10}<x<\sqrt[3]{10}$ обл. сх-ти

$R=\sqrt[3]{10}$

$x=-\sqrt[3]{10}$

$u_n=\dfrac{(-\sqrt[3]{10})^{3n}}{10^n}=\dfrac{(-1)^{3n}\cancel{10^n}}{\cancel{10^n}}=(-1)^{3n}$ расх-ся

1. $|u_n|=1$ Н. пр. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд расх-ся

$\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$ р. расх-ся

2. пр. Лейбница б) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ р. расх-ся.

$x=\sqrt[3]{10}$ $\quad u_n=\dfrac{(\sqrt[3]{10})^{3n}}{10^n}=\dfrac{10^n}{10^n}=1$ – расх-ся.

Ответ: обл. сх-ти ряда $-\sqrt[3]{10} < x < \sqrt[3]{10}$

5. $\frac{2x-3}{1} + \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} + \dots$

$u_n = \frac{(2x-3)^n}{2n-1}$ $u_{n+1} = \frac{(2x-3)^{n+1}}{2n+1}$

$2(n+1)-1 = 2n+2-1 = 2n+1$

$$\left| \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2x-3)^n}(2x-3)}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{\cancel{(2x-3)^n}} \right| < 1$$

$$|2x-3| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)'}{(2n+1)'}}_{1} < 1 \qquad |2x-3| < 1$$

$\underbrace{-1 < 2x-3}\underbrace{< 1}$ $2 < 2x < 4$ $1 < x < 2$ обл. сх-ти

$x = 1$ $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ – усл. сх-ся !!!

1. $|u_n| = \frac{1}{2n-1}$ расх-ся $b_n = \frac{1}{n}$ – расх-ся гармон.

условие $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ выпол.

2. пр. Лейбница а) $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1}$

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ ряд. сх-ся.

$\underline{x=2}$ $u_n = \frac{1}{2n-1}$ – расх-ся

Ответ: $1 \le x < 2$ – область сх-ти ряда

6. $\frac{x^3}{8\cdot 1} + \frac{x^6}{8^2\cdot 5} + \frac{x^9}{8^3\cdot 9} + \dots$ $u_n = \frac{x^{3n}}{8^n\cdot(4n-3)}$

$\overset{4}{\frown}\ \overset{4}{\frown}\ \overset{4}{\frown}$

$1\ 5\ 9\ 13$ $4n-3$

$n+4$ $5,6,7$

$u_{n+1} = \frac{x^{3n+3}}{8^{n+1}(4n+1)}$

$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^{3n}}\cdot x^3}{\cancel{8^n}\cdot 8(4n+1)} \cdot \frac{\cancel{8^n}\cdot(4n-3)}{\cancel{x^{3n}}}\right| < 1$

$\frac{|x^3|}{8}\ \lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)'}{(4n+1)'} < 1$ $\quad \frac{|x^3|}{8} < 1 \quad |x^3| < 8$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)'}{(4n+1)'} = 1$

$-8 < x^3 < 8$ $\underline{-2 < x < 2}$ обл. сх-ти

$\underline{x=-2}$ $u_n = \frac{(-2)^{3n}}{8^n(4n-1)} = \frac{(-1)^{3n}\cdot\cancel{8^n}}{\cancel{8^n}(4n-1)} = \frac{(-1)^{3n}}{4n-1}$ усл. сх-ся.

1. $|u_n| = \frac{1}{4n-1}$ расх-ся пр. срав. $b_n = \frac{1}{n}$ – расх-ся гармон

усл. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$ выполнен

2. пр. Лейбница а) $\underset{u_n}{\frac{1}{4n-1}} > \underset{u_{n+1}}{\frac{1}{4n+1}}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n-1} = 0$ р. сх-ся.

$\underline{x=2}$ $u_n = \frac{2^{3n}}{8^n(4n-1)} = \frac{8^n}{8^n(4n-1)} = \underset{\text{расх.}}{\frac{1}{4n-1}}$

Ответ: $-2 \le x < 2$ – область сх-ти ряда.

Д/з. Занятие 6 $\boxed{12, 13, 18, 20}$

<u>мне прислать!!!</u>

ksumat@mail.ru

!! тест по числовым рядам.