Разложение функций в степенные ряды

ЗК-19
14.10.20

п1. Ряды Тейлора и Маклорена

Для любой ф-ии $f(x)$, определенной в окрест-ти точки x_0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \qquad (1)$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0, x)$

– остаточный член в форме Лагранжа

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$P_n(x)$ - многочлен Тейлора

Если ф-ия $f(x)$ имеет $'$-ые любых порядков в окрест-ти т) x_0 и остат. член $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то из формулы Тейлора получается разложение ф-ии $f(x)$ <u>по степеням</u> $(x-x_0)$, называемое <u>рядом Тейлора</u>

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2)$$

$0! = 1, \quad 1! = 1 \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$ то получим разложение ф-и по степеням x в так называемый ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (3)$$

п2. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора (Маклорена)

Для разложения ф-и $f(x)$ в ряд Маклорена (3) нужно:

- найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x) \ldots$
- вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$; $f'(0); f''(0), \ldots f^{(n)}(0) \ldots$
- записать ряд (3) для заданной ф-и и найти его интервал сходимости

Некоторые элементарные ф-и, разложенные в ряд Маклорена

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty)$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$x \in (-\infty; \infty)$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty)$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$

$x \in (-1; 1]$

5. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

$x \in [-1; 1]$

6 $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots$

$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1] & m \geq 0 \\ (-1; 1] & -1 < m < 0 \\ (-1; 1) & m \leq -1 \end{cases}$$

7. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad x \in (-1; 1)$

$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \quad m = -1$

$1+(-x)$

Примеры

1. $f(x)=3^x$ в ряд Маклорена

I способ. $x_0=0$

$f(0)=3^0=1$

$f'(x)=3^x\ln 3$ $\quad f'(0)=3^0\ln 3=\ln 3$

$f''(x)=3^x\ln 3\cdot\ln 3$ $\quad f''(0)=\ln^2 3$

$f'''(x)=\ln^2 3\, 3^x\cdot\ln 3$ $\quad f'''(0)=\ln^3 3$

$f^{(n)}(x)=3^x\ln^n 3$ $\quad f^{(n)}(0)=\ln^n 3$

$$3^x=1+\frac{\ln 3}{1!}x+\frac{\ln^2 3}{2!}x^2+\dots+\frac{\ln^n 3}{n!}x^n+\dots$$

$$|U_n|=\frac{\ln^n 3}{n!}x^n \qquad U_{n+1}=\frac{\ln^{n+1} 3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\ln^n 3}\cdot\ln 3\;\cancel{x^n}\cdot x\;\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{!}\;\cancel{\ln^n 3}\cdot\cancel{x^n}}\right|<1$$

$$|x|\ln 3\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}}_{=0}<1 \qquad |x|\ln 3<\frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}}_{=0}}=\infty=R$$

ряд сх-ся $x\in(-\infty;\infty)$

II способ $\quad 3^x=e^{\ln 3^x}$ $\qquad a^{\log_a b}=b$

$3^x = e^{x\ln 3}$ $\quad e^x = e^{x\ln 3}$

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{\ln^2 3}{2!}x^2 + \dots + \frac{\ln^n 3}{n!}x^n + \dots$$

$$-\infty < x\ln 3 < \infty$$

$$-\infty < x < \infty$$

2) $f(x) = \ln(4-x)$ в р. Маклорена

$\ln(1+x) = \dots\dots$

$$\ln 4\cdot\left(1-\frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left(1-\frac{x}{4}\right) =$$

$$= \ln 4 + \ln\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right) = \ln 4 + (*)$$

$$(*)\ \ln\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right) = \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \dots$$

$$= -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4^3}\frac{x^3}{3} - \dots - \frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} - \dots$$

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4^3}\frac{x^3}{3} - \dots -$$

$$- \frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} - \dots$$

$$-1 < x \le 1$$

$$-1 < -\frac{x}{4} \le 1$$

$-4 \le x < 4$ – область сх-ти ряда

3) $f(x)=\frac{2}{3-x}$ в ряд Маклорена

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3(1-\frac{x}{3})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

Заменив x на $\frac{x}{3}$ в пункте 7, получи

$$f(x)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\dots\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\frac{x^2}{3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3^3}+\dots+\frac{2}{3}\frac{x^n}{3^n}+\dots$$

$-1<x<1$ $\qquad -1<\frac{x}{3}<1$ $\qquad -3<x<3$

обл. сх-ти.

4). $f(x)=e^{2x}$ в (.) $x_0=-1$ $\qquad (x-x_0)=$
$=(x+1)$

$f(-1)=e^{-2}$

$f'(x)=2e^{2x}$ $\qquad f'(-1)=2e^{-2}$

$f''(x)=4e^{2x}$ $\qquad f''(-1)=4e^{-2}$

$f'''(x)=8e^{2x}$ $\qquad f'''(-1)=8e^{-2}$

$f^{(n)}(-1)=2^n e^{-2}$

Подставляем в ряд (2) р. Тейлора

$$e^{2x}=e^{-2}+\frac{2e^{-2}}{1!}(x+1)+\frac{4e^{-2}}{2!}(x+1)^2+\dots+$$

$$+\frac{2^n e^{-2}}{n!}(x+1)^n+\ldots$$

$$u_n=\frac{2^n e^{-2}}{n!}(x+1)^n \qquad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}e^{-2}(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cancel{e^{-2}}\cancel{(x+1)^n}\cdot(x+1)}{(n+1)\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}\cancel{e^{-2}}\cancel{(x+1)^n}}\right|<1$$

$$2|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}<1$$

$$2|x+1|<\frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}}_{=0}}=\infty\ (R)$$

$$-\infty<x<\infty$$

Д/з. 1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$ р. Маклорена

2) $f(x)=\frac{1}{5+x}$ $x=2$
ряд Тейлора