ЗК-19

22.10.20

Приложение степенных рядов: приближенное вычисление

Пример: 1). Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить значение ф-ии с заданной точностью ε.

$\sqrt[4]{19}$, $\varepsilon = 0{,}001$ Находим число близко к 19, у которого извлекается корень 4 степени – это 16

$$\sqrt[4]{19} = \sqrt[4]{16+3} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{3}{16}\right)} = 2\sqrt[4]{\left(1+\frac{3}{16}\right)} =$$

$$= 2\left(1+\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Используем разложение в степенной ряд ф-ии $(1+x)^m$, $x = \frac{3}{16}$; $m = \frac{1}{4}$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$(-1 < x < 1)$

$$\sqrt[4]{19} = 2\left(1+\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\Big(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{1}{4}-1\right)}_{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}-1\right)}_{-3/4}\underbrace{\left(\frac{1}{4}-2\right)}_{-7/4}\cdot\frac{3^3}{16^3} + \ldots\Big) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{3}{64} - \frac{27}{32\cdot 16^2} + \frac{21\cdot 27}{6\cdot 64\cdot 16^3} + \ldots\right)$$

$< \varepsilon$

$\varepsilon = 0,001$

$= 2(1 + 0,0469 - \underbrace{0,0033}) = 2 \cdot 1,0436 =$
$= 2,0872 \approx 2,087$

2. Вычислить $\sin 18^0$, $\varepsilon = 0,0001$

$18^0 = \frac{\pi}{10}$; $\sin\frac{\pi}{10}$ $\quad \pi = 3,14$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 120} - \ldots =$$

$$= \frac{3,14}{10} - \frac{(3,14)^3}{6000} + \frac{(3,14)^5}{12000000} - \ldots =$$

$$= 0,314 - 0,0052 + \underbrace{0,0000025}_{<\varepsilon} =$$

$\cong \underline{0,3088}$

3. Вычислить $\ln 1,04$ $\quad \varepsilon = 0,0001$

Воспользуемся разложением фии

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$\ln(1,04) = \ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{(0,04)^2}{2} +$$

$$+ \frac{(0,04)^3}{3} - \frac{(0,04)^4}{4} + \ldots = 0,04 - 0,0008 +$$

$+\underbrace{0,00002}<\varepsilon \approx 0,04-0,0008=0,0392$

4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$, $\varepsilon=0,001$

$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$

$$\int_0^1 \frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\dots}{x}dx=$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+\dots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}-\frac{x^7}{5040\cdot 7}+\dots\right)\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{5040\cdot 7}=1-0,0556+$$

$$+0,00167-\underbrace{0,0000283}<\varepsilon=$$

$$=1-0,0556+0,00167=0,94607\approx$$

$$\approx 0,9461$$

5. $\int_0^{0,5}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$ $\varepsilon=0,001$

$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$

$$\int_0^{0,5} \frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\right)}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\dots\right)dx =$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\dots\right)\Big|_0^{0,5} =$$

$$=0,5-\frac{1}{72}+\frac{1}{32\cdot 25}-\frac{1}{128\cdot 49}=$$

$$=0,5-0,01389+0,00125-\underbrace{0,00016}_{<\varepsilon}$$

$$=0,5-0,01389+0,00125\approx 0,48736=\underline{0,4874}$$

1) Тест по „Ряды"

2) РГД „Ряды" ksumat@mail.ru

3) таблица интегралов.