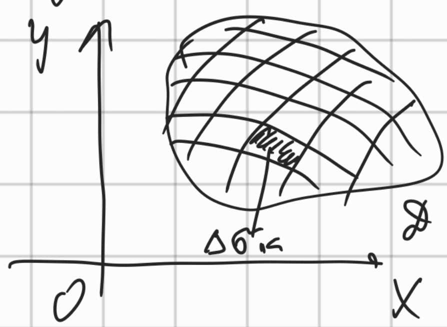
Кратные интегралы 3К-19

28.10.20.

§1. Двойные интегралы

п.1. Основные понятия

$f(x,y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости XOY



Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей, имеющих площади $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2 \dots \Delta\sigma_n$ и диаметры $d_1, d_2, \dots, d_n$ (диаметром наз-ся наибольшее из расстояний между 2мя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольным образом точку $P_k(x_k, y_k)$ и умножим значение ф-ии в (·) P_k на площадь этой области.

О Интегральной суммой для ф-ии $f(x,y)$ по области D наз-ся сумма вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k = f(x_1,y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2,y_2)\Delta\sigma_2 + \dots + f(x_n,y_n)\Delta\sigma_n \qquad (1)$$

Если при $\max d_k \to 0$ интегральная сумма имеет определенный конечный lim

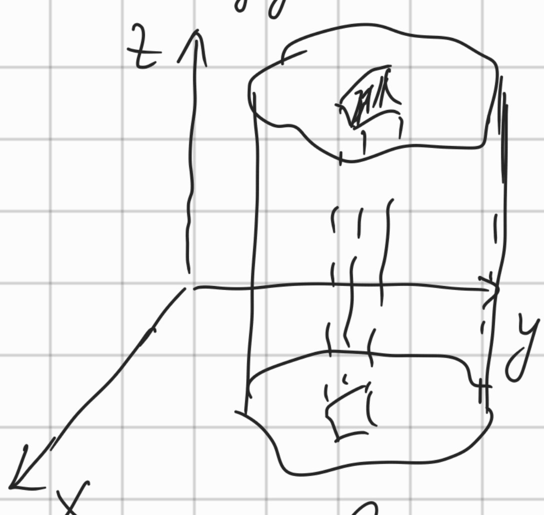
$$I = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$$

не зависящий от способа разбиения области D на элем. области и от выбора точек P_k, то этот предел наз-ся <u>двойным интегралом</u> от ф-ии $f(x,y)$ в области D и обозначается

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k \quad (2)$$

Геометрический смысл:

Если $f(x,y) > 0$ в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ равен объему цилиндр. тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, сбоку цилиндр. поверхностью с образующими $\parallel$ оси Oz и снизу областью D плоскости xOy



п 2. Основные свойства двойного интеграла

1. $$\iint\limits_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right) d\sigma = \iint\limits_D f_1(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_D f_2(x,y)\,d\sigma$$

2. $$\iint\limits_D c\, f(x,y)\,d\sigma = c \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma, \quad c = const$$

3. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\sigma$$

4. Оценка двойного интеграла.

Если $m \le f(x,y) \le M$, то

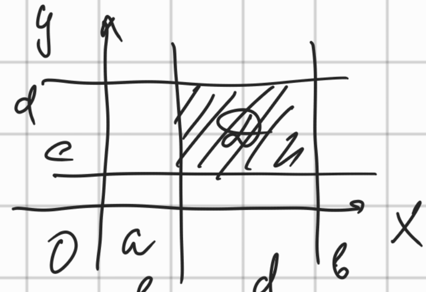
$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \le MS$$, S – площадь области D

m, M – соот-но наименьшее и наибольшее значение ф-ии $f(x,y)$ в области D

п 3. Правила вычисления двойных интегралов.

Различают 2 основных вида области интегрирования

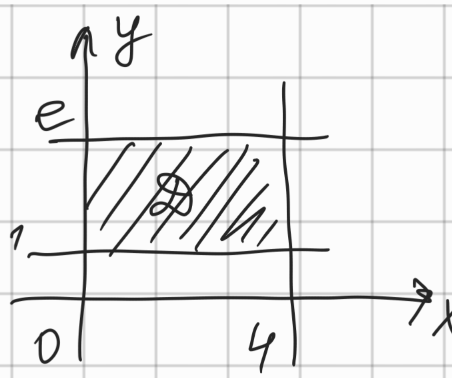
I. Область интегрирования D – прямоугольная область: $D = \{a \le x \le b;\ c \le y \le d\}$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \quad (3)$$

Примеры 1. $\iint\limits_D x \ln y \,dx\,dy$ $\quad D:\ 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le e$



$$\int_0^4 dx \int_1^e x\cdot \ln y\, dy = \int_0^4 x\,dx \int_1^e \ln y\, dy$$

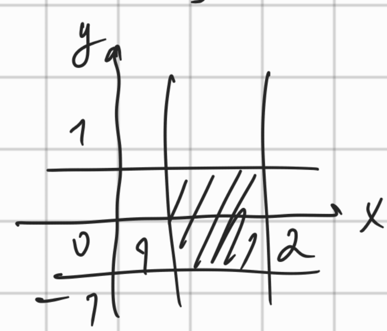
$$= \int_0^4 x\,dx\,(y\ln y - y)\Big|_1^e =$$

$$\boxed{\int \ln x\,dx = x\ln x - x}$$

$$= \int_0^4 x\,(e\underbrace{\ln e}_{=1} - e - 1\underbrace{\ln 1}_{=0} + 1)\,dx$$

$$= \int_0^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8$$

2. $\iint\limits_D (x-y)\,dx$ $D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$



$$\int_1^2 dx \int_{-1}^1 (x-y)\,dy =$$

$$= \int_1^2 dx \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \int_1^2 dx\left(x - \cancel{\frac{1}{2}} - (-x) + \cancel{\frac{1}{2}}\right) = \int_1^2 2x\,dx = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_1^2 =$$

$$= 4 - 1 = \boxed{3}$$

3. $\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y)\,dx\,dy$ $D: 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$

$$\int 2\,dy = 2y$$

$$\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} \left(\underbrace{\cos^2 x}_{\text{число}} + \sin^2 y\right) dy = \int_0^{\pi/4} dx \left(\cos^2 x \cdot y + \int \frac{1-\cos 2y}{2}\, dy\right) = \int_0^{\pi/4} dx \left(y\cos^2 x + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\sin 2y}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} dx \left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\right) =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) dx = \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{\pi}{8}x - \frac{1}{4}x \Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\overset{=1}{\sin\frac{\pi}{2}}}{2}\right) + \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{32} + \cancel{\frac{\pi}{16}} + \frac{\pi^2}{32} - \cancel{\frac{\pi}{16}} = \boxed{\frac{\pi^2}{16}}$$

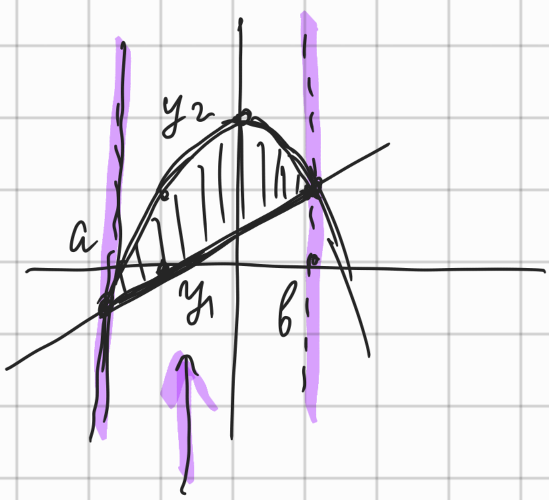
II. Область интегрирования D: $\underline{a} \le x \le \underline{b}$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy$$

$\mathcal{D}:\ c \le y \le d \qquad x_1(y) \le x \le x_2(y)$

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

4. $\iint\limits_{\mathcal{D}} (x-y)\,dx\,dy \qquad \mathcal{D}: \begin{cases} y = 2-x^2 \to y_2 \\ y = 2x-1 \to y_1 \end{cases}$



$y = y \Rightarrow a$ и b

$2-x^2 = 2x-1 \Rightarrow$

$x^2+2x-3=0$

$\mathcal{D} = 4+12 = 16$

$\dfrac{-2 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array}\right.$

$-3 \le x \le 1$

$$\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy = \int_{-3}^{1} dx \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} =$$

$$= \int_{-3}^{1} dx \left(x(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} - x(2x-1) + \frac{(2x-1)^2}{2} \right)$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - \frac{4-4x^2+x^4}{2} - 2x^2 + x + \frac{4x^2-4x+1}{2} \right) dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(3x - x^3 - \cancel{2x^2} - 2 + 2x^2 - \frac{x^4}{2} + \cancel{2x^2} - 2x + \frac{1}{2} \right) dx$$

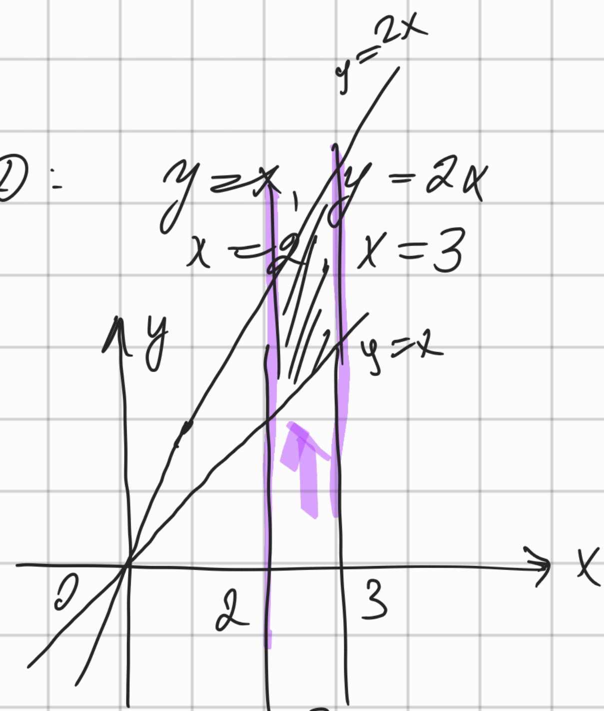
$$= \int_{-3}^{1} \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right)\Big|_{-3}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{3^5}{10} - \frac{81}{4} - \frac{54}{3} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right) =$$

$$= \boxed{4\frac{4}{15}}$$

2. $\iint (x+2y)\,dx\,dy$ $\qquad D:\ y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3$



$$\int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y)\,dy =$$

$$= \int_2^3 dx \left(xy + \cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_x^{2x} =$$

$$= \int_2^3 dx\left(\cancel{x\cdot 2x} + (2x)^2 - \cancel{x\cdot x} - \cancel{x^2}\right) = \int_2^3 4x^2\,dx =$$

$$= \frac{4x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{4}{3}(27-8) = \frac{19\cdot 4}{3} = \frac{76}{3} = \boxed{25\frac{1}{3}}$$

Д/з. 1) $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x} (x-y)\,dx$

2) $\iint y \ln x\, dx\, dy$ $\qquad D:\ xy=1$ $\quad y=\frac{1}{x}$

$y=\sqrt{x}$

$x=2$