Занятие 15. **Двойные интегралы: повторные интегралы, изменение порядка интегрирования.**

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости Oxy. Разобьём область D произвольным образом на n элементарных замкнутых областей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, имеющих площади $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ и диаметры $d_1, d_2, \ldots, d_n$, соответственно. Обозначим через d наибольший из диаметров областей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Определение. *Диаметром* замкнутой ограниченной области σ_n называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области.

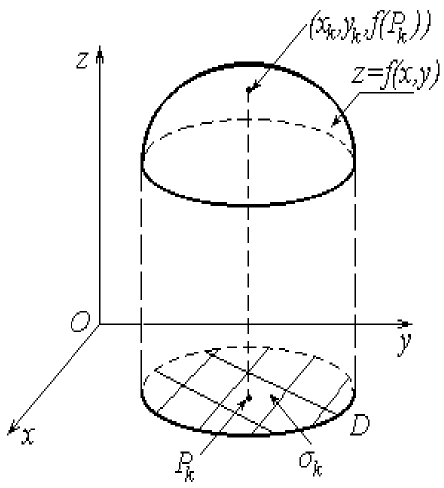


Рис.1. Построение разбиения области D.

В каждой области σ_k выберем произвольную точку $P_k(x_k, y_k)$ и составим *интегральную сумму* (рис. 2.1):

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k . \qquad (1)$$

Определение. *Двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы σ при наибольшем диаметре областей деления, стремящемся к нулю:

$$I = \lim_{d\to 0}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k =$$

$$= \iint_D f(x, y)\,dxdy. \qquad (2)$$

D называется обла*стью интегрирования*.

Геометрический смысл двойного интеграла. Если $f(x, y) \geq 0$ в области D, то двойной интеграл равен объему цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, сверху – частью поверхности $z = f(x, y)$, сбоку – вертикальными отрезками прямых, соединяющих границы этой поверхности и области D (рис. 1):

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

При $f(x, y) \equiv 1$ двойной интеграл численно равен площади области интегрирования:

$$\iint_D dxdy = S_D .$$

Основные свойства двойного интеграла.

1. Линейность.

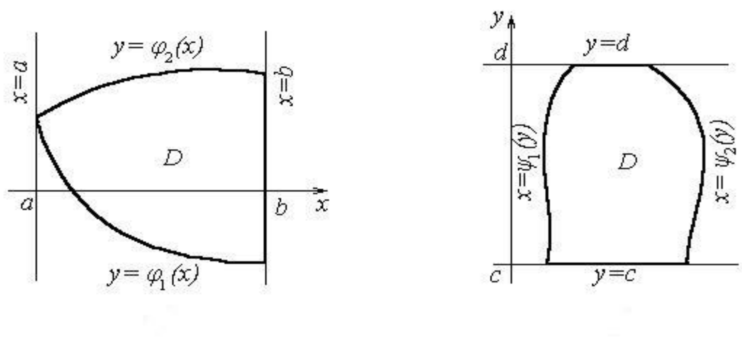
$$\iint_D [c_1 f(x,y) \pm c_2 g(x,y)]dxdy = c_1 \iint_D f(x,y)\,dxdy \pm c_2 \iint_D g(x,y)\,dxdy .$$

2. Аддитивность. Если $D = D_1 \cup D_2$ – объединение двух областей, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy .$$

Назовем область D *простой* в направлении оси Ox (Oy), если прямые, перпендикулярные оси, пересекают границу области не более, чем в двух точках. Пусть точки с абсциссами $x = a$ и $x = b$ являются крайними точками области D слева и справа по оси Ox и разбивают границу области на две кривые $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ (рис. 2а). Тогда D можно записать в виде неравенств:

$$D = \{(x,y): \quad a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \tag{3}$$



а б

Рис. 2. Области в направлении осей Ox (а) и Oy (б).

Двойной интеграл (2) по области D в этом случае вычисляется переходом к *повторному интегралу*:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy . \tag{4}$$

Интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ называется *внутренним*, а интеграл от a до b – *внешним*. Повторный интеграл (4) вычисляется справа налево: сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (при этом x считается постоянной), в результате интегрирования получится функция от переменной x, а затем вычисляется внешний интеграл от этой функции по переменной x.

В направлении оси Oy область D имеет вид (рис. 2б):

$$D = \{(x,y): \quad c \le y \le d, \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}. \tag{5}$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,. \tag{6}$$

Предположим, что область D можно представить в виде (3) и (5) одновременно (D – простая область в направлении обеих осей). Тогда имеет место равенство:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \tag{7}$$

(7) – формула *изменения порядка интегрирования* в двойном интеграле.

При вычислении двойного интеграла в случае сложной области ее разбивают на несколько простых и пользуются свойством аддитивности.

Примеры. 1. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+5} \frac{1}{x^2}\,dy$.

Решение. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+5} \frac{1}{x^2}\,dy = \int\limits_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx \int\limits_2^{x^2+5} dy = \int\limits_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx\, y \,\Big|_2^{x^2+5} = \int\limits_1^3 \frac{x^2+3}{x^2}\,dx = \int\limits_1^3 dx +$

$+3\int\limits_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \left(x - \frac{3}{x}\right)\Big|_1^3 = (3-1)-(1-3)=4$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^2 f(x,y)\,dy\,.$$

Решение. По виду пределов повторного интеграла находим область $D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\quad 2x \le y \le 2\}$ (рис. 3). Эта область расположена в горизонтальной полосе между прямыми $y=0,\quad y=2$ и между линиями $x=0,\quad x=\frac{y}{2}$. В направлении оси Oy область имеет вид: $D=\left\{(x,y):\ 0 \le y \le 2,\quad 0 \le x \le \frac{y}{2}\right\}$.

Тогда по формуле (7) получаем:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^2 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx.$$

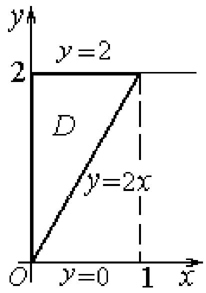


Рис. 3. Рисунок к примеру 2.

Задачи.

Вычислить повторные интегралы.

1. $\int_2^4 dx \int_1^2 xy dy$. 2. $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x} (x-y)\,dy$. 3. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx$

Нарисуйте область и измените порядок интегрирования.

4. $\int_1^3 dx \int_{x/3}^{2x} f(x,y)dy$. 5. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$. 6. $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

7. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$. 8. $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{2+x} f(x,y)dy$. 9. $\int_0^4 dy \int_y^{y=10} f(x,y)dx$. 10. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

Дополнительные задачи.

11. Нарисуйте область и измените порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^2 dy \int_{2y-y^2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 1.

Вычислить повторные интегралы.

14. $\int_1^e dx \int_4^6 \frac{y}{x} dy$. 15. $\int_1^3 dx \int_{x^3}^{x-1} xy\,dy$. 16. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y} (x-4y)\,dx$.

Нарисуйте область и измените порядок интегрирования.

17. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$. 18. $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$. 19. $\int_{-2}^{0} dy \int_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$. 21. $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$.

20. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}/\sqrt{2}}^{\sqrt{4-x^2}/\sqrt{2}} f(x,y)dy$. 21. $\int_0^{R\sqrt{2}/2} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{R\sqrt{2}/2}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$.