

**Занятие 16. Вычисление двойных интегралов по заданной области: прямоугольной и криволинейной.**

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

**Пример.** Вычислить  $I = \iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy$ , где  $D$

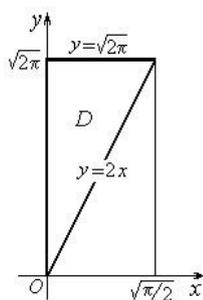
По формуле (6)

– область, ограниченная линиями  $x = 0$ ,  $y = \sqrt{2\pi}$ ,  $y = 2x$ .

*Решение.* Найдём абсциссу точки пересечения прямых  $y = 2x$  и  $y = \sqrt{2\pi}$ :

$2x = \sqrt{2\pi}$ , отсюда  $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . Область интегрирования

$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{2\pi}; 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \right\}$  изображена на рис.



$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2\pi}} y^2 dy \int_0^{\frac{y}{2}} \cos \frac{xy}{2} dx &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} dy y^2 \frac{2}{y} \sin \frac{xy}{2} \Big|_0^{\frac{y}{2}} = 2 \int_0^{\sqrt{2\pi}} y \sin \frac{y^2}{4} dy = 4 \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{y^2}{4} d\left(\frac{y^2}{4}\right) = \\ &= -4 \cos \frac{y^2}{4} \Big|_0^{\sqrt{2\pi}} = -4 \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 4. \end{aligned}$$

**Задачи.**

Вычислить двойные интегралы.

- $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ ,  $D = \left\{ \frac{1}{2} \leq x \leq e; 1 \leq y \leq 3 \right\}$ .
- $\iint_D (x + y) dx dy$ ,  $D = \left\{ 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 2 - x^2 \right\}$ .

3.  $\iint_D (x+2y) dx dy$ ,  $D = \{y = x; y = 2x; x = 2; x = 3\}$ . 4.  $\iint_D y \ln x dx dy$ ,  
 $D = \{xy = 1; y = \sqrt{x}; x = 2\}$ . 5.  $\iint_D x dx dy$ ,  $D = \{y = 6; y + x - 7 = 0\}$ .  
6.  $\iint_D xy dx dy$ ,  $D = \{x = x^2; y^2 = x\}$ . 7.  $\iint_D 2y dx dy$ ,  $D = \{y = 0; y = \sqrt{x}; y + x = 2\}$ .  
8.  $\iint_D \frac{x}{2} dx dy$ ,  $D = \{y = 0; y = \pi; x = 2 + \sin y\}$ .

**Дополнительные задачи.**

9. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле  $\iint_D f(x; y) dx dy$ , где  $D$  ограничена гиперболой  $y^2 - x^2 = 1$  и окружностью  $x^2 + y^2 = 9$ , и область содержит начало координат.

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 1.

10.  $\iint_D ye^{-xy} dx dy$ ,  $D = \{1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$ .  
11.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D = \{x = 0; y = x; y = 1; y = 2\}$ .  
12.  $\iint_D y^2 \cos(xy) dx dy$ ,  $D = \{x = 0; y = \sqrt{\pi}; y = x\}$ .  
13.  $\iint_D y dx dy$ ,  $D = \{y = \sqrt{x}; y = -x; x - y = 2\}$ . 14.  $\iint_D \frac{x dx dy}{y^2}$ ,  
 $D = \{y = x; y = 9x; y = 1/x\}$ . 15.  $\iint_D x^3 dx dy$ ,  $D = \{y = 0; y = x; y = 2 - x^2\}$ .  
16.  $\iint_D y^2 e^{-(xy)/8} dx dy$ ,  $D = \{x = 0; y = 2; y = x/2\}$ .  
17.  $\iint_D (xy - 4x^3 y^3) dx dy$ ,  $D = \{x = 1; y = x^3; y = -\sqrt{x}\}$ .