Занятие 17. Вычисление двойных интегралов по заданной области: прямоугольной и криволинейной.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,.$$

Пример. Вычислить $I = \iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $x=2, \quad x=3, \quad y=x, \quad y=2x.$

Решение. $I = \iint\limits_D (x+2y)\,dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)\,dy = \int\limits_2^3 dx (xy+y^2)\,\Big|_x^{2x} =$

$$= \int\limits_2^3 dx(2x^2+4x^2-x^2-x^2)\,\Big|_x^{2x} = 4\int\limits_2^3 x^2\,dx = \frac{4}{3}x^3\,\Big|_2^3 = \frac{4}{3}(27-8) = \frac{76}{3}.$$

Задачи.

Вычислить двойные интегралы.

1. $\iint\limits_D x\,dxdy$, $D-$ треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$.

2. $\iint\limits_D x\,dxdy$, D ограничена прямой, проходящей через точки $A(2;0)$, $B(0;2)$, и окружностью с центром в точке $B(0;1)$ и радиусом 1.

3. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy, D-$криволинейный треугольник OAB, ограниченный параболой $y^2=x$ и прямыми $x=0$ и $y=1$.

4. $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy,\ D=\{x=0;\ y=2-x^2;\ y=2x-1\}$.

5. $\iint\limits_D (x^3+y^3)\,dxdy,\ D=\{x=4;\ y=x/2;\ y=x\}$.

6. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy, \qquad D=\{y=x/2;\ y=2/x;\ y=2x\ (x>0)\}$.

Дополнительные задачи.

7. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D y\,dxdy$, где область D ограничена осью Ox и одной аркой циклоиды $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 1.

Вычислить двойные интегралы.

8. $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)\,dxdy,\ D=\{x=0;\ y=2;\ y^2=x\}$.

9. $\iint\limits_D dxdy,\ D=\{x^2+y^2=2;\ y=0;\ y^2=x\ \ (y>0)\}$.

10. $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D=\{x^2+y^2=4;\ x+y-2=0\}$.

11. $\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy,\ D-$ параллелограмм с вершинами, $A(-1;2)$, $B(3;4)$, $C(3;1/2)$, $B(-1;-3/2)$.

12. $\iint\limits_D x^4y\,dxdy,\ D=\{xy=1;\ y-x=0;\ x=2\}$.

13. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy,\ D=\{y=e^x;\ x=0;\ y=2\}$.