Занятие 18. Замена переменных в двойном интеграле: двойной интеграл в полярных координатах.

Пусть дан двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D. Перейдем к новым переменным по формулам $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ где функции новых переменных u и v непрерывны вместе со своими частными производными. Тогда справедлива формула замены переменных:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))|J|\,du\,dv\ , \tag{1}$$

где D^* – область интегрирования в переменных u и v; определитель

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

называется *якобианом перехода* от переменных x и y к переменным u и v.

Переход к полярным координатам в двойном интеграле. Декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Тогда якобиан

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\,.$$

Пусть область D в декартовых координатах преобразуется в область D_r в полярных координатах. Тогда интеграл (2.2) преобразуется в двойной интеграл в полярных координатах по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi\,. \tag{3}$$

Двойной интеграл (3) вычисляется переходом к повторному интегралу в полярных координатах. Пусть область D_r имеет вид: $D_r = \{(r,\varphi):\ \alpha \le \varphi \le \beta,\ \ r_1 \le r \le r_2\}$, где лучи $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ограничивают сектор, в котором находится фигура D_r, кривые $r = r_1(\varphi),\ r = r_2(\varphi)$ ограничивают ее в этом секторе. Тогда

$$\iint\limits_{D_r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,.$$

К полярным координатам в основном переходят, если область интегрирования представляет собой круг или его часть.

Примеры. 1. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле в полярных координатах $\iint\limits_{D_r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr d\varphi$, где D_r – полукруг на рис. *Решение.* Уравнение полукруга $r = 2\cos\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$. Чтобы описать внутренность полукруга радиус r должен измениться от 0 до $2\cos\varphi$. Таким образом:

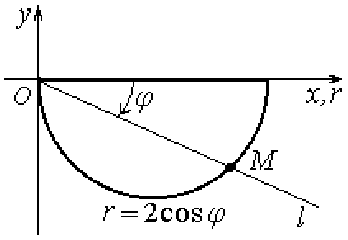

Рис. Полукруг.

Рисунок к примеру 1.

$$D_r = \left\{ (r,\varphi) : \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0, \quad 0 \le r \le 2\cos\varphi \right\}.$$

Следовательно:

$$\iint\limits_{D_r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr.$$

2. Вычислить $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, где

$$D = \left\{ (x, y) : \ x^2 + y^2 - 2x \le 0, \quad y \le 0 \right\}.$$

Решение. Подставим в уравнение окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$ полярные координаты и преобразуем: $r^2 - 2r\cos\varphi = 0$, отсюда $r = 2\cos\varphi$. Получили уравнение полуокружности в полярных координатах. Поскольку $y \le 0$, то D – полукруг из предыдущего примера. Расставим пределы интегрирования и вычислим:

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}\, r dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi\, r^3 \Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{8}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \sin^2\varphi)\, d\sin\varphi = \frac{8}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2} \right) = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{9}.$$

Задачи.

Вычислить повторный интеграл.

1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\; r^2\, dr$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы.

2. $\iint\limits_{D} r^4 \sin\varphi\, dr d\varphi$, D – круговой сектор, ограниченный линиями $\varphi = \pi/3$, $\varphi = \pi/2$, $r = 2$.

3. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – круг радиуса 1 с центром в начале координат.

4. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$, $x^2+y^2=\pi^2$.

5. $\iint\limits_D y\,dxdy$, где D – полукруг диаметра a с центром в точке $C\left(\frac{a}{2},0\right)$.

6. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D-$ 1 четверть круга $x^2+y^2\le a^2$.

7. $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy,\ D=\{e^2\le x^2+y^2\le e^4\}$.

Дополнительные задачи.

8. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,\ D$ – область внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, введя обобщенные полярные координаты $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi.$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 2.

Вычислить повторный интеграл.

9. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-r^2}\ r^2\,dr$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы.

10. $\iint\limits_D r^4\cos\varphi\,drd\varphi,\ D$ – половина круга радиуса R с центром в точке $C(R;0)$, расположенная ниже полярной оси.

11. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy, D=\{x^2+y^2=2ax\}$. 12. $\iint\limits_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy, D=\{x^2+y^2\le\pi^2\}$.

13. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}, D=\{y=\sqrt{1-x^2};\ y=0\}$. 14. $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D=\{\pi^2/4\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$. 15. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D=\{x^2+y^2=4;\ x\ge 0\}$.