

Занятие 19. Двойной интеграл в полярных координатах.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_r} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Перейдя к полярным координатам, вычислить

Пример. Перейдя к полярным координатам, вычислить

$$I = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

Решение. Область интегрирования – четверть круга радиуса a с центром в начале координат, расположенная в первой четверти. Тогда

$$D_r = \{0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq r \leq a\}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad dx dy = r dr d\varphi.$$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3} \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Задачи.

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы.

1. $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, где область D ограничена лепестком лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0.$$

2. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 = 2\}$.

3. $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0\}$.

4. $\iint_D (2 - 2x - 3y) dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 = 1\}$.

5. $\iint_D x dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 - 2x = 0; x^2 + y^2 - x = 0\}$.

6. $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 = 4\}$.

7. $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 = 4y\}$.

Дополнительные задачи.

8. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2/a^2 - y^2/b^2}} dx dy$, D – область, ограниченная линиями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} = 1$, введя обобщенные полярные координаты $x = a \cos \varphi$, $y = b r \sin \varphi$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 2.

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы.

9. $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$, где область D ограничена лепестком лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

10. $\iint_D (1 - 2x - 3y) dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 = 9; y \leq x; y \geq -x\}$.

11. $\iint_D xy dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; x \geq 0; y \geq 0\}$.

12. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D = \{x^2 + y^2 = 4; y \geq x; y \leq x\sqrt{3}\}$.

13. $\iint_D (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dx dy$, $D = \{x^2 + y^2 \geq 1; x^2 + y^2 \leq 4\}$.

14. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $D = \{x^2 + y^2 = a^2; x^2 + y^2 = b^2 (a < b < R); y = x;$

$$y = \sqrt{3}x; (x \geq 0; y \geq 0)\}.$$