Занятие 20. Замена переменных в двойном интеграле: двойной интеграл в криволинейных координатах.

Пусть дан двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D. Перейдем к новым переменным по формулам $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ где функции новых переменных u и v непрерывны вместе со своими частными производными. Тогда справедлива формула замены переменных:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,du\,dv\,,$$

где D^* – область интегрирования в переменных u и v; определитель

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

называется *якобианом перехода* от переменных x и y к переменным u и v.

Пример. Вычислить $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^3}$, где $D -$ трапеция с вершинами $A(1;3)$, $B(2;6)$, $C(6;2)$, $D(3;1)$.

Решение. Найдем уравнения сторон трапеции как уравнения прямых, проходящих через две данные точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Получаем:

$$3x - y = 0\ (AB),\ x + y - 8 = 0\ (BC),\ x - 3y = 0\ (CD),\ x + y - 4 = 0\ (DA).$$

Введем новые переменные по формулам:

$$x + y = u\,,\quad y = vx,$$

из которых находим x и y:

$$x = \frac{u}{1+v}\,,\quad y = \frac{uv}{1+v}\,.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{1+v}\,,\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{(1+v)^2}\,,\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{1+v}\,,\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{(1+v)^2}\,.$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2}\\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^3}+\frac{uv}{(1+v)^3}=\frac{u}{(1+v)^2}.$$

В новых переменных трапеция $ABCD$ переходит в прямоугольник со сторонами $u=4$, $u=8$, $v=1/3$, $v=3$. Тогда

$$\iint_D\frac{dxdy}{(x+y)^3}=\iint_{D_{uv}}\frac{1}{u^3}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}dudv=\int_4^8\frac{1}{u^2}du\int_{1/3}^3\frac{1}{(1+v)^2}dv=\frac{1}{u}\Big|_4^8\cdot\frac{1}{1+v}\Big|_{1/3}^3=$$

$$=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

Задачи.

1. Вычислить $\int_0^c dx\int_{\alpha x}^{\beta x}dy$, введя новые переменные $u=x+y$, $y=uv$.

2. Заменой $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$, вычислить $\iint_D dxdy$, где D ограничена линиями $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$.

Вычислить двойные интегралы, упростив их с помощью необходимой замены.

3. $\iint_D xydxdy,\quad D=\{x+y=1;\ x+y=3;\ y=5x;\ y=10x\}$.

4. $\iint_D (x+y)^3\,dxdy$, $D=\{xy=a^2/2;\ xy=2a^2;\ y=x/2;\ y=2x\}$.

5. $\iint_D (x+y)^2\,dxdy$, $D-$ трапеция с вершинами $A(1/4;3/4)$, $B(3/4;9/4)$, $C(1/5;4/5)$, $D(3/5;12/15)$.

6. $\iint_D \frac{x}{y}dxdy,\quad D=\{xy=2;\ xy=4;\ y=2x;\ y=4x\}$.

Дополнительные задачи.

7. С помощью надлежащей замены переменных вычислить двойной интеграл

$\iint_D\left(xy+\frac{y}{x^2}\right)dxdy$, где D ограничена линиями $xy=p$, $xy=q\quad(0<p<q)$,

$y = ax^2$, $y = bx^2$ $(0 < a < b)$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 2.

8. Вычислить $\int_0^1 dx \int_x^{2x} dy$, введя новые переменные $x = u(1-v)$, $y = uv$.

Вычислить двойные интегралы, упростив их с помощью необходимой замены.

9. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}$, где $D-$ трапеция с вершинами $A(3/4;1/4)$, $B(21/4;7/4)$, $C(1/6;5/6)$, $D(7/6;35/6)$.

10. $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 \, dxdy$, $D = \{x + y = 2;\ x + y = 4;\ x - y = 1;\ x - y = -1\}$.

11. $\iint_D \frac{x^2 \sin\left(\frac{xy}{2}\right)}{y} dxdy$, $D = \{x^2 = \pi y/2;\ x^2 = 2\pi y/3;\ y^2 = 2x;\ y^2 = 4x\}$.

12. $\iint_D dxdy$, $D = \{y^2 = x;\ y^2 = 16x;\ y^2 = x^3;\ 16y^2 = x^3\}$.

13. $\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$, $D = \{xy = 4;\ xy = 9;\ y^2 = 3x;\ y^2 = 6x\}$.