Занятие 21. Приложения двойного интеграла. Площади плоских фигур. Объемы.

Вычисление площади плоской фигуры. Площадь ограниченной области D

$$S_D = \iint\limits_D dxdy.$$

Вычисление объема цилиндрического тела. Если $f(x,y)\ge 0$ в ограниченной области D, то объем цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, сверху – частью поверхности $z = f(x,y)$, с боков – вертикальными отрезками прямых, соединяющих границы этой поверхности и области D равен $V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$

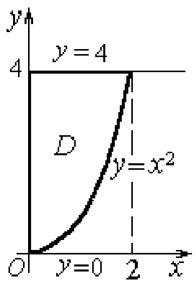

Рис. к примеру 1.

Примеры. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2,\ y = 4,\ x = 0.$

Решение. Данная фигура D расположена в вертикальной полосе $0 \le x \le 2$, а в ней ограничена снизу параболой $y = x^2$, сверху – прямой $y = 4$ (рис. 2.5). Отсюда

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^4 dy = \int\limits_0^2 (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4,\ z = x^2 + y^2$.

Решение. $z = 0,\ x^2 + y^2 = 4$ – это круговой цилиндр радиуса 2, ограниченный снизу плоскостью $z = 0$, а сверху – параболоидом $z = x^2 + y^2$, который пересекает цилиндр по окружности радиуса 2 в плоскости $z = 4$ (рис. 2.6).

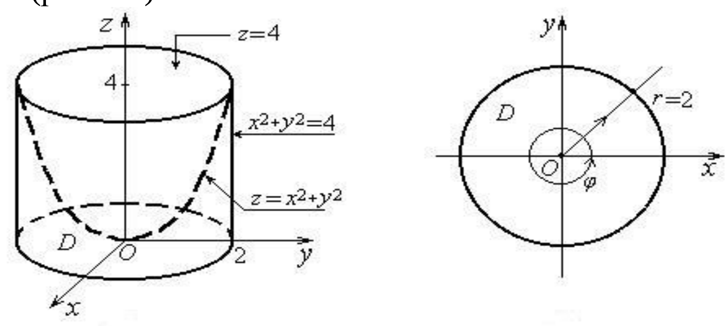

Рис. к примеру 2.

Объем тела $V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, где $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 4,\ \ z = 0\}$.

Переходим к полярным координатам, При этом круг D преобразуется во множество $D_r = \{(r,\varphi):\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le 2\}$. Получим:

$$V = \iint (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,r\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2 r^3dr = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, r^4\ \Big|_0^2 = 4\varphi\ \Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

Задачи.

1. Вычислить площадь, ограниченную прямыми $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$.

2. Найти площадь, ограниченную прямой $r\cos\varphi = 1$ и окружностью $r = 2$ и не содержащую полюса.

3. Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2 = x^3$, $x = -y^2 + 2$.

4. Найти площадь, ограниченную окружностями $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x^2 + y^2 + 2ay = 0$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$.

6. Переходя к полярным координатам, вычислить объем тела, ограниченного плоскостью Oxy, цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 2 = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

8. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $x + 2y - z = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $x = -1$, $x = 3$, $z = 0$.

Дополнительные задачи.

9. Найти площадь, ограниченную кривыми $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $x^2 + y^2 = a^2$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = x^2 - y^2$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 3, 4.

Вычислить площади, ограниченные данными линиями

11. $x = y^2 - 2y$, $x + y = 0$. 12. $y^2 = 4x - x^2$, $y^2 = 2x$ (вне параболы).

13. $r = 2 - \cos\varphi$, $r = 2$ (вне кардиоиды).

14. Вычислить площадь ближайшей от начала координат фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = 0$.

Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

15. $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. 16. $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

17. $z = 5x$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$. 18. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $y = 0$, $z = x/2$, $z = x$.