

Занятие 22. Механические приложения двойного интеграла.

Масса неоднородной плоской пластинки:

$$M = \iint_D \gamma(x; y) dx dy,$$

где $\gamma(x; y)$ – плотность пластинки в точке $(x; y)$.

Масса однородной плоской пластинки:

$$M = \iint_D dx dy.$$

Статические моменты пластинки относительно осей координат:

$$M_x = \iint_D y dx dy; \quad M_y = \iint_D x dx dy.$$

Моменты инерции пластинки относительно осей координат:

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 dx dy; \quad I_{Oy} = \iint_D x^2 dx dy.$$

Момент инерции пластинки относительно начала координат:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = I_{Ox} + I_{Oy}.$$

Координаты центра тяжести пластинки:

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M}; \quad \bar{y} = \frac{M_y}{M}.$$

Пример. Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$, относительно оси Ox .

Решение. Перейдя к полярным координатам в формуле $I_{Ox} = \iint_D y^2 dx dy$, получим

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \iint_{D_r} r^2 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^3 dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi r^4 \Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} = \\ &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + 4 \cos \varphi + 6 \cos^2 \varphi + 4 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi.$$

Вычислим отдельно каждый из пяти полученных интегралов.

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

$$4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d \sin \varphi = \frac{4}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$6 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \pi.$$

$$4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi d \sin \varphi = 4 \left(\frac{1}{3} \sin^3 \varphi - \frac{1}{5} \sin^5 \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi + \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d \sin \varphi = \frac{\pi}{8} + 0 = \frac{\pi}{8}.$$

Окончательно, $I_{Ox} = \frac{a^4}{4} \left(\pi + \frac{3}{2} \pi + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{21\pi a^4}{32}.$

Задачи.

1. Вычислить момент инерции треугольника, ограниченного прямыми $x=2$, $y=2$, $x+y=2$, относительно оси Ox .
2. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$.
3. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной одной петлей кривой $r=a \sin \varphi$.
4. Вычислить момент инерции площади, ограниченной линиями $y=2-x^2$, $y=0$, относительно оси Ox .
5. Вычислить статический момент относительно оси Oy пластинки, ограниченной следующими линиями: $xy=8$, $x+y=9$.

6. Вычислить статический момент относительно оси Ox пластинки, ограниченной следующими линиями: $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$), $x = 0$.

7. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $y^3 = x^2$, $y = -x^2 + 2$.

Дополнительные задачи.

8. Вычислить массу круга $x^2 + y^2 \leq 2Rx$, если в каждой его точке поверхностная плотность равна расстоянию от этой точки до начала координат.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 2. Гл. I, пар. 6.

9. Найти момент инерции относительно начала координат фигуры, ограниченной линиями $x/a + y/b = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

10. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$.

11. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $x - y = -3$, $y = x^2 + 1$.

12. Вычислить статический момент относительно оси Oy пластинки, ограниченной следующими линиями: $x - 3y = 0$, $x + y = 8$, $x = 3$.

13. Вычислить статический момент относительно оси Ox пластинки, ограниченной следующими линиями: $x^2 + y^2 = 8$, $x - y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

14. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $x + y = 4$, $x - 3y = 0$, $x + 5y - 16 = 0$.

15. Вычислить момент инерции площади, ограниченной линиями $xy = 1$, $x - y = 0$, $x = 2$ относительно оси Oy .