

Расчетная работа по теме «Двойной интеграл»

Задача 1. Измените порядок интегрирования. Нарисуйте область интегрирования.

$$1. \int_1^2 dx \int_{1/x}^x f(x, y) dy$$

$$2. \int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx$$

$$3. \int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy$$

$$4. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$5. \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx$$

$$6. \int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dx$$

$$7. \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$$

$$8. \int_3^7 dx \int_{x/9}^3 f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{x/9}^{10-x} f(x, y) dy$$

$$9. \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy$$

$$10. \int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$$

$$11. \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$12. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x, y) dy$$

$$13. \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$$

$$14. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy$$

$$15. \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

$$16. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$

$$17. \int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$$18. \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx$$

$$19. \int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y) dy$$

$$20. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$21. \int_0^3 dx \int_{1-x}^{3-x} f(x, y) dy$$

$$22. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

$$23. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx$$

$$24. \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy$$

$$25. \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$

$$26. \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx$$

$$27. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$$

$$28. \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy$$

$$29. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x, y) dy$$

$$30. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f(x, y) dx.$$

Задача 2. Вычислите двойной интеграл по заданной области. Нарисуйте область интегрирования.

1. $\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dx dy,$ $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$
2. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$ $D: y = x; x = 0; y = 1; y = 2$
3. $\iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy,$ $D: x = 0; x = y^2; y = 2$
4. $\iint_D y \ln x dx dy,$ $D: xy = 1; y = \sqrt{x}; x = 2$
5. $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy,$ $D: x = 0; y = 0; 4x + 4y - \pi = 0$
6. $\iint_D e^{x+y} dx dy,$ $D: y = e^x; x = 0; y = 2$
7. $\iint_D \sin(x + y) dx dy,$ $D: x = 0; y = \frac{\pi}{2}; y = x$
8. $\iint_D x dx dy$ $D: \triangle ABC : A(2;3), B(7;2), C(4;5)$
9. $\iint_D x^2 y dx dy$ $D: y = 0; y = 2x^3; x + y = 3$
10. $\iint_D (x - y) dx dy$ $D: y = 2 - x^2, y = 2x - 1$
11. $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$ $D: y = x/2; y = x; x = 4$
12. $\iint_D dx dy$ $D: y^2 = x; x^2 + y^2 = 2; y = 0; (y \geq 0)$
13. $\iint_D (3x^2 - y) dx dy$ $D: y = 2x; 2y - x = 0; x + y - 6 = 0$
14. $\iint_D y dx dy$ $D: y^2 = x; y = x - 2$
15. $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ $D: y = x^2; x = y^2$
16. $\iint_D \frac{x^2 dx dy}{y^2},$ $D: x = 2; y = x; xy = 1$
17. $\iint_D \cos(x + y) dx dy,$ $D: x = 0; y = \pi; y = x$
18. $\iint_D (xy^2 + 1) dx dy,$ $D: y = \frac{x}{2}; y = \sqrt{\frac{x}{2}}$
19. $\iint_D (x + 2y) dx dy,$ $D: y = 4x + 6; y = \frac{x}{2} - 1; x = -1$
20. $\iint_D (2x + y) dx dy,$ $D: y = -\frac{2x}{3} + 6; y = \frac{x}{2} - 1; x - 3 = 0$
21. $\iint_D y \cos(2xy) dx dy,$ $D: y = \pi/2; y = 3\pi; x = 1; x = 3$
22. $\iint_D 12ye^{6xy} dx dy,$ $D: y = \ln 3; y = \ln 4; x = 1/6; x = 1/3$

23. $\iint (44xy + 16x^3y^3) dx dy$, $D: x = 1; y = x^2; y = -\sqrt[3]{x}$
24. $\iint 12y \sin(2xy) dx dy$, $D: y = \pi/4; y = \pi/2; x = 2; x = 3$
25. $\iint_D y^2 \cos(xy) dx dy$, $D: x = 0; y = \sqrt{\pi}; y = x$
26. $\iint_D y dx dy$, $D: y = \sqrt{x}; y = -x; x - y = 2$
27. $\iint_D \frac{x dx dy}{y^2}$, $D: y = x; y = 9x; y = 1/x$
28. $\iint_D x^3 dx dy$, $D: y = 0; y = x; y = 2 - x^2$
29. $\iint_D y^2 e^{-(xy)/8} dx dy$, $D: x = 0; y = 2; y = x/2$
30. $\iint (xy - 4x^3y^3) dx dy$, $D: x = 1; y = x^3; y = -\sqrt{x}$

Задача 3. Вычислите двойной интеграл, сделав замену переменных. Нарисуйте область интегрирования.

1. $\iint_D x^3 y^2 dx dy$, $D: x^2 + y^2 = R^2$
2. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 4}$, $D: y = \sqrt{1 - x^2}, y = 0$
3. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, $D: x^2 + y^2 = 2$
4. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = a^2; x^2 + y^2 = 4a^2$
5. $\iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0$
6. $\iint_D dx dy$, $D: xy = 1, xy = 2, y = x, y = 3x$
7. $\iint_D (2 - 2x - 3y) dx dy$, $D: x^2 + y^2 = 1$
8. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = a^2; y \geq 0; x \geq 0$
9. $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = 4x$
10. $\iint_D (x^2 - y^2)(x - y) dx dy$, $D: \begin{cases} x + y - 1 = 0; x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0; x - y + 1 = 0 \end{cases}$
11. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 2}$, $D: y = \sqrt{4 - x^2}; y \geq 0$
12. $\iint_D x dx dy$, $D: x^2 + y^2 - 2x = 0; x^2 + y^2 - x = 0$
13. $\iint_D e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = 4$
14. $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$, $D: x^2 + y^2 = 4y$

15. $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$, $D: x^2+y^2=1; x \geq 0; y \geq 0$
16. $\iint_D \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, $D: x^2+y^2=4\pi^2; x^2+y^2=\pi^2$
17. $\iint_D xy dx dy$, $D: xy=a^2/2; xy=2a^2; y=x/2; y=2x$
18. $\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy$, $D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=9$
19. $\iint_D y dx dy$, $D: x^2+y^2=1; -1 \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1$
20. $\iint_D xy dx dy$, $D: x^2+y^2=9; y \geq x; x \geq 0$
21. $\iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, $D: x^2+y^2=\pi^2/4; x^2+y^2=\pi^2$
22. $\iint_D xy dx dy$, $D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; x \geq 0; y \geq 0$
23. $\iint_D (1-2x-3y) dx dy$, $D: x^2+y^2=9; y \leq x; y \geq -x$
24. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D: x^2+y^2=4; y \geq x; y \leq x\sqrt{3}$
25. $\iint_D x dx dy$, $D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; -1 \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1$
26. $\iint_D \frac{x^2 \sin(xy/2) dx dy}{y}$, $D: \begin{cases} x^2 = \frac{\pi y}{3}; x^2 = \frac{2\pi y}{3} \\ y^2 = 2x; y^2 = 4x \end{cases}$
27. $\iint_D dx dy$, $D: x^2 = ay; x^2 + y^2 = 2a^2; y = 0; x \geq 0; a > 0$
28. $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$, $D: x^2+y^2=a^2; x \leq 0; y \geq 0$
29. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9} dx dy$, $D: x^2+y^2=9; x^2+y^2=25; x \geq 0; y \leq 0$
30. $\iint_D x\sqrt{x^2+y^2} dx dy$, $D: x^2+y^2=4; x \geq 0$

Задача 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями, используя двойной интеграл. Нарисуйте область интегрирования.

- $y = e^{2x}; y = e^x; x = 1$.
- $xy = 9; x = y; x = 6$.
- $y = \frac{x}{4}; y = 2x; x + 3y - 7 = 0$.
- $y = \frac{x^2}{2}; y = x + 3; 2x + y = 6$.
- $y^2 + x^2 = 1; x^2 + y^2 = 25; y = x\sqrt{3}; x = 0$.
- $x^2 + y^2 = 2y; y = x; x = 0$.
- $y = 4x - x^2; y = 3x^2$.
- $y = x^2; 4y = x^2; y = 4$.
- $r = 1; r = \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{3}}$ (вне окружности $r = 1$).
- $x = 4y - y^2; x + y = 6$.
- $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$.
- $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 - 4y = 0; x = 0$.
- $y = 2 - x; y^2 = 4x + 4$.
- $y^2 = -x + 4; y^2 2x - 5$.

15. $y^2 = 4x - x^2; y^2 = 2x$ (вне параболы).
 16. $3y^2 = 25x; 5x^2 = 9y$.
 17. $y = \cos x; y = \cos 2x; y = 0; 0 \leq x \leq \pi/2$
 18. $y = 4x - x^2; y = 2x^2 - 5x$.
 19. $x = 4 - y^2; x + 2y - 4 = 0$.
 20. $r = 2(1 - \cos \varphi); r = 2$ (вне кардиоиды).
 21. $r = 2(1 + \cos \varphi); r = 2 \cos \varphi$.
 22. $y^2 = 4 - 4x; x^2 + y^2 = 4$ (вне параболы).
 23. $y = 0; y = 4; y = -x; y = \frac{x-1}{2}$.
 24. $x^2 + y^2 = 2x; y = 0; y = x\sqrt{3}$.
 25. $y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; x = 4$.
 26. $y^2 = \frac{b^2x}{a}; y = \frac{bx}{a}$.
 27. $ay = x^2 - 2ax; y = x$.
 28. $ax = y^2 - 2ay; x + y = 0$.
 29. $y^2 = a^2 - ax; y = a + x$.
 30. $xy = a^2; x + y = 2,5a$.

Задача 5. Физические приложения двойного интеграла. Нарисуйте область интегрирования.

1. Определите центр тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; y = 2x^2; x = 1; x = 2$.
2. Определите центр тяжести полусегмента параболы $y^2 = ax$, отсеченной прямыми $x = a; y \geq 0$.
3. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной одной петлей кривой $r = a \sin 2\varphi$.
4. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной параболой $y^2 = x; y = x^2$.
5. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = 2p$.
6. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2x - x^2}; y = 0$.
7. Вычислите моменты инерции относительно оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}; x + y = 3; y = 0$.
8. Вычислите момент инерции относительно начала координат фигуры, ограниченной прямыми $x + y = 2; x = 0; y = 0$.
9. Вычислите момент инерции относительно оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2; y = 0$.
10. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми $ay = x^2; x + y = 2a; a > 0$.
11. Найдите координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = ax; y = x$.
12. Найдите момент инерции относительно оси OY однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1; x + 2y = 2; y = 0$.
13. Найдите координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной петлей кривой $r = a \sin 2\varphi$, лежащей в первой четверти.
14. Определите моменты инерции I_x, I_y, I_0 фигуры, ограниченной прямыми $x = 0; x = a; y = 0; y = b$.
15. Определите момент инерции относительно осей OX и OY фигуры, ограниченной прямыми $y = x/2; x = a; y = a$.
16. Определите центр тяжести фигуры, ограниченной прямой $y = 0$ и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.
17. Определите центр тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; x = 4; y = 0$.

18. Определите центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линией $y = \sin x$, осью OX и прямой $x = \pi/4$.
19. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $2y = x^2; y = x^2; x = 1; x = 2$.
20. Найдите моменты инерции I_x, I_y однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = a^2; xy = 2a^2; x = y; 2x = y; x > 0; y > 0$.
21. Найдите момент инерции I_y однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2; 0 \leq x \leq a; y = 0$.
22. Найдите момент инерции фигуры, ограниченной линиями $x + y = 3; y = 2\sqrt{x}; y = 0$ относительно оси OX .
23. Найдите момент инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1 + \cos \varphi)$ относительно оси OX .
24. Однородная пластинка имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого лежат на осях координат, длина гипотенузы равна $4b$. Найдите момент инерции относительно оси OY .
25. Найдите координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px; x^2 = 2py$.
26. Найдите координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной окружностями $r = 2 \cos \varphi; r = 4 \cos \varphi$.
27. Найдите момент инерции однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = 4; x + y = 5$, относительно оси OX .
28. Найдите координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 8x; y = 0; x + y = 6; y \geq 0$.
29. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = R^2; y \geq 0$.
30. Найдите момент инерции однородной фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}; y + x = 3; x = 0$, относительно оси OX .