**Глава 1**

**ВЕЩЕСТВЕННЫЕ (ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ) ЧИСЛА**

**§ 1. Основные понятия**

**1. Представление вещественных чисел в виде бесконечных де­сятичных дробей**. Множество вещественных чисел разбивается на два множества: рациональных и иррациональных чисел. *Рацио­нальным* называется число, которое можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где р и q — целые числа, причем q ≠ O. *Иррациональным* называется всякое вещественное число, которое не является ра­циональным.

 Любое вещественное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби *a*, $a\_{1},a\_{2}, a\_{3}… a\_{n}…,$ где *а* — любое целое число, $a\_{1},a\_{2}, a\_{3}… a\_{n}…$— числа, принимающие целые значения от

О до 9(0≤$a\_{n}$≤9).

 Всякое рациональное число $\frac{p}{q}$является либо целым, либо его можно представить в виде конечной или периодической бесконеч­ной десятичной дроби. Иррациональное же число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, ра­циональные числа 3/4 и 1/3 представляются соответственно сле­дующими десятичными дробями: 0,75 и 0,333 ...; иррациональные числа $\sqrt{2}$ и $π$ представляются соответственно непериодическими бесконечными десятичными дробями: 1,41421356... и 3,14159... ,

 1. Определить, какие из данных бесконечных десятичных дробей рациональные числа, какие — иррациональные: 5,424242...; 0,32375375...; 1,313013001...; 7,1308367...

 2. Доказать, что число

0,1010010001 … $\frac{1000…01}{n нулей}$ иррационально.

 3. Привести пример, показывающий, что сумма двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

 4. Привести пример, показывающий, что разность двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

 5. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное рационального числа а ≠ 0 и иррационального числа $β$ есть число иррациональное.

 6. Доказать, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

 7. Доказать, что $\sqrt{3}$ не является рациональным числом.

**2. Некоторые числовые множества.** Пусть X — некоторое множество вещественных чисел. Тогда запись x$\in $X означает, что число х принадлежит X, а запись х$\notin $Х означает, что число х не принадлежит X.

 Если $x\_{1}$ ..., хn — некоторые числа, то запись Х={х1 ..., хn} означает, что множество X состоит из чисел х1,…,$x\_{n}$. Аналогич­ный смысл имеет запись Х={х1, х2, х3, ...}.

 Пусть X и Y—два множества. Запись X⸦Y означает, что X есть подмножество множества Y.

 Пусть Р (х) — какое-то свойство числа х. Тогда запись {х│Р(х)} обозначает множество всех таких чисел, которые об­ладают свойством Р(х).

 Пусть *a* и *b* — два числа, причем *a*<*b*. Будем использовать следующие обозначения и терминологию:

{x│a≤x≤b}=[a,b]− *отрезок (сегмент);*

{x│a≤x≤b}=(a,b), {x│a <x}=(a, +∞), {x│x<b}=(-∞, b), {x│-∞<x<+∞}=

(-∞, +∞) – *интервалы*;

{x│a≤x≤b}=(a,b], {x│a≤x˂b}=[a,b), {x│a≤x}=[a, +∞),{x│x≤b}=(-∞, b] - *полуинтервалы*

Все эти множества называются *промежутками*. Промежутки [*a, b*], (*a*, *b*], [*а, b*) и (*а, b*) называются *конечными*; *а* и *b* — их *концами*. Остальные промежутки называются *бесконечными*.

Вещественные числа изображаются точками на координатной прямой\*, поэтому множество всех вещественных (-∞, +∞) называют *числовой прямой*, а сами числа — *точками*.

Пусть *a* — произвольная точка числовой прямой и $ε$ (гречес­кая буква «эпсилон») — положительное число. Тогда интервал (a-$ε$, a+$ε$) называется $ε$*-окрестностью точки а.*

 8. Чем отличается интервал (*а, b*) от отрезка [*а, b*]?

 9. Из отрезка [*а, b*] удален интервал (*а, b*). Что осталось?

 10. Из отрезка [1, 8] удален интервал (3, 5). Какие промежутки

остались?

 11. Из интервала (—10, 5) удален отрезок [—5, 3]. Какие промежутки остались?

**§ 2. Грани числовых множеств**

Пусть X — непустое множество вещественных чисел.

**Определение.** *Множество X называется ограниченным сверху (снизу), если существует число с такое, что для любого x*$\in $*X выполняется неравенство x≤c (x≥c).*

Число *с* в этом случае называется *верхней (нижней) гранью* множества X.

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *огра­ниченным.*

**Примеры.**

**1.** Любой конечный промежуток ограничен. Пример: [0; 1], (0; 1), [0; 1), (0; 1].

**2.** Ин­тервал (*a*, +∞) есть множество, ограниченное снизу, но не огра­ниченное сверху.

**3.** Интервал (-∞, +∞) есть множество, не ограниченное ни сверху, ни снизу.

Наименьшее(наибольшее) из чисел, ограничивающих множе­ство X сверху (снизу), называется *точной верхней (нижней) гра­нью* множества X и обозначается символом sup X(inf X)\*.

**Свойство точной верхней (нижней) грани.** *Как бы мало ни было число* $ε$*>0, существует число х*$\in $*Х такое, что x>supX—*$ℇ$*(х <infX+*$ ℇ$*).*

**Теорема.** *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) чис­ловое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то пишут sup X=+∞ (inf= -∞).

**Пример**. Доказать, что множество X=$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},…,\frac{1}{n},…\right\}$ ограни­чено. Установить, какие числа являются его гранями. Найти точные верхнюю и нижнюю грани этого множества.

Решение. При любом натуральном п выполняются неравен­ства 0<$\frac{1}{n}$≤1, поэтому данное множество X ограничено. Таким образом, число 1 — верхняя грань, а число 0 — его нижняя

грань.

Докажем, что число 1 является точной верхней гранью множе­ства Х, т.е. что supX=l. Для этого, согласно свойству точной верхней грани, надо показать, что для любого $ℇ$>0 существует натуральное число *n* такое, что выполняется неравенство $\frac{1}{n}$˃1-$ℇ$.

Этим числом *n* является n=1, так как 1 > 1 - $ℇ$ — верное неравен­ство для любого $ℇ$ > 0, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что число 0 является точной нижней гранью множества X. Для этого надо проверить, что для любого $ℇ$>0 существует натуральное число *n* такое, что выполняется неравенство $\frac{1}{n}$˂ 0 + $ℇ$. Решая неравенство, получаем n˃$\frac{1}{ℇ}$. Взяв какое-нибудь натуральное число n > $\frac{1}{ℇ}$, получим требуемое неравенство, а это, согласно свойству точной нижней грани, и означает, что число 0 является точной нижней гранью множества X, т.е. inf X=0.

Отметим, что данному множеству X точная грань 1 принад­лежит и является его наибольшим числом, а точная нижняя грань 0 не принадлежит и в этом множестве нет наименьшего числа.

12. Доказать, что множество X=$\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},…,\frac{n}{n+1}…\right\}$ ограничено. Установить, какие числа являются его гранями. Найти точ­ные верхнюю и нижнюю грани этого множества (n — натура­льное число).

 13. Приведите примеры числовых множеств X, у которых: a) sup Х$\in $X; б) sup Х$\notin $Х; в) inf Х$\in $Х; г) inf Х$\notin $Х. Имеет ли множе­ство X в случаях а) и б) наибольшее, а в случаях в) и г) наименьшее число?

 14. Приведите пример числового множества X, когда inf X = sup X.

 15. Приведите пример числового множества X, когда inf Х$\in $Х, a sup Х$\notin $Х.

 16. Можно ли утверждать, что для неограниченного числово­го множества X сверху (снизу) найдется бесконечное множество чисел, больших (меньших), чем любое наперед заданное число М>0?

 17. Доказать, что множество X=$\left\{…-3,-2,-1,0,1,2,3…\right\}$ всех целых чисел не ограничено ни снизу, ни сверху, т. е. supX= +∞ и infX= -∞.

 18. Доказать, что множество Х={1, 2, 3, ...} натуральных чисел не ограничено сверху, т. е. supX=+∞ .

 19. Доказать, что, каковы бы ни были числа *а* и *b*, 0<*а*<*b*, существует такое целое число n>0, что *an*>*b*.

 20. Пусть X и Y — два непустых числовых множества. До­казать, что если Y⸦X, то: a)sup Y≤sup X; б) inf Y ≥ inf X.

 21. Пусть X и Y— два непустых числовых множества. До­казать, что:

a) sup{r|z=x+y; х$\in $Х, у$\in $Y} = supX + sup Y;

б) mf{z|z=x+y; х$\in $Х, у$\in $Y}—inf Y- inf Y.

 22. Пусть X и Y — два непустых числовых множества. До­казать, что если каждое х$\in $Х меньше любого y$\in $Y и для любого $ε$>0 существуют х$\in $Х и y$\in $Y такие, что у-х<$ε$, то supХ= inf Y.

**§ 3. Абсолютная величина вещественного числа**

**Определение.** *Абсолютной величиной (или модулем) числа х называется само число х, если х≥0, или число —х, если х<0.*

Абсолютная величина числа *х* обозначается символом |х|.

Таким образом,

|х|= $\left\{\begin{array}{c}x,если x\geq 0\\-x , если x<0\end{array}\right.$

Например, | + 5| = 5; | - 5|= -(-5) = 5; |0| = 0

Основные свойства абсолютных величин:

1°. |х| > 0.

2°. |х| = |-x|,

3°. -|х|$ \leq x\leq $|х|,

4°. Неравенство |х|$ \leq ε $($ε$>0) означает, что -$ε $< x <$ ε$,

5°. Неравенство |х| ≥$ α $($α$>0) означает, что либо х ≥$ α $, либо x $\leq α$

6°. |х$\pm $y| ≤ |х|+|y|.

7°. |х$\pm y$| ≥ |х|-|y|.

8°. |х$∙y$| = |х| |y|

9°. |$\frac{x}{y}$| =$ \frac{|х|}{|y|}$ (y≠0).

**Пример 1.** Найти решения уравнений: 1) |х|=х+2; 2) |х|=х-2; 3)х+2|х|= 3.

Решение.

1) При х≥0 имеем х=х+2, откуда 0=2 — невер­ное равенство; следовательно, решений нет. При х<0 получаем -х=х+2, откуда х= - 1 — решение уравнения.

2) При х>0 имеем х=х—2, откуда 0= —2 — неверное равен­ство; следовательно, решений нет. При х<0 получаем — х=х—2, откуда х=1>0, что противоречит сделанному предположению х<0. Таким образом, уравнение не имеет решений.

3) При х≥0 имеем х+2х=3, откуда x1 = l. При х<0 получа­ем х-2х= 3, откуда х2= -3. Следовательно, $x\_{1}$ = 1 и х2= - 3 — решения уравнения.

**Пример 2.** Решить уравнение |х-5|=х-5.

Решение. По определению, |х|=х при х≥0. Следовательно, данное уравнение представится в виде х -5≥0, откуда х≥5.

**Пример 3.** Решить неравенство |2х-1|>2х-1.

Решение. Так как |х| > х только при х < 0, то неравенство

справедливо для тех *х*, при которых 2х -1 < 0, откуда х <$ \frac{1}{2}$ .

**Пример 4.** Решить неравенство |х- 3| ≥ 2.

Решение. В силу свойства 5° будем иметь х-3 ≥ 2 или х-3 ≤ -2, откуда получаем ответ: либо х ≥ 5, либо х ≤ 1.

**Пример 5.** Доказать неравенство ||х|-|у||≤|х-у|.

Решение. В силу свойств 2° и 7° имеем

|х-у| ≥ |х| - |у| и |х-у| = |-(х-у)| =| y-х| ≥ |y|-|x|. (1)

Умножая второе неравенство на -1, получаем

-|х-у| ≤ |х| -| у|. (2)

Объединяя (1) и (2), найдем -|х-у| ≤ |х| - |y| ≤ |х-у|, откуда в си­лу свойства 4°

||х|-|у|| ≤ |х-у|.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Чем отличается интервал (a, b) от отрезка [a, b]?

2. Из отрезка [a, b] удален интервал (a, b). Что осталось?

3. Из отрезка [1. 8] удален интервал (3, 5). Какие промежутки остались?

Решить уравнения и неравенства:

4. |x| = -x 5. |x| > x 6. |x – 2| < 3 7. |x – 1| > 2

8. |x| = x + 1 9. |x| < x + 1 10. |x + 4| = |x – 4|