**Глава 2**

**ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ**

**§ 1. Числовые последовательности**

**1. Определение числовой последовательности.**

**Определение 1.** *Если каждому числу п из натурального ряда чисел 1, 2, 3,… п, поставлено в соответствие вещественное число , то множество вещественных чисел*

*называется числовой последовательностью или просто последовательностью.*

Числа называются *элементами (членами)* последовательности, символ — *общим элементом (членом)* последовательности, а n — *номером элемента.* Кратко последовательность обозначают символом {}.

Последовательности {}, {}, {}, называются *соответственно суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей:* {} и {}.

**Пример 1.** Дана формула общего элемента последовательности Написать пять первых элементов последовательности.

Решение. Полагая последовательно *n* =1, 2, 3, 4, 5 в общем элементе получаем = l/2, =2/3, =3/4, =4/5, =5/6.

**2. Ограниченные н неограниченные последовательности.**

**Определение 2.** Последовательность {} *называется ограниченной сверху (снизу), если существует число М (т) такое, что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенству .*

**Определение 3.** *Последовательность {} называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. существуют числа m и М такие, что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенствам m.*

**Определение 4.** *Последовательность {} называется неограниченной, если для любого положительного числа А существует элемент этой последовательности, удовлетворяющий неравенству .*

**3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.**

**Определение 5.** *Последовательность {} называется бесконечно большой, если для любого положительного числа А существует номер N такой, что при n>N выполняется неравенство*

**Пример 2.** Используя определение 5, доказать, что последовательность {n} является бесконечно большой.

Решение. Возьмем любое число А>0. Из неравенства получаем n >А. Если взять N A, то для всех n>N будет выполняться

, т. е. последовательность {n} бесконечно большая.

Замечание. Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность 1, 2, 1, 3, 1, 4, ..., 1, n, 1, n + 1, не является бесконечно большой, поскольку при A >1 неравенство не имеет места для всех элементов с нечетными номерами.

**Определение 6.** *Последовательность {} называется бесконечно малой, если для любого положительного числа существует номер N такой, что при n>N выполняется неравенство .*

**Пример 3.** Используя определение 6, доказать, что последовательность является бесконечно малой.

Решение. Возьмем любое число >0. Из неравенства получаем . Если взять то для всех будет выполняться , т. е. последовательность бесконечно малая.

**Теорема.** Если {}— бесконечно большая последовательность, то последовательность бесконечно малая, и, обратно, если — бесконечно малая последовательность, , то последовательность бесконечно большая.

**§ 2. Сходящиеся последовательности**

**1. Определение предела последовательности.**

**Определение.** *Число а называется пределом последовательности , если для любого положительного числа существует номер N такой, что при n>N выполняется неравенство*

При этом последовательность называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся.*

Обозначение предела (читается «предел хn при n стремящемся к бесконечности равен »):

**Пример 1.** Используя определение предела, доказать, что

Решение. Возьмем любое число >0. Так как

то для нахождения значений n, удовлетворяющих .

Если взять , то для всех будет выполняться , т. е.

**2. Основные свойства сходящихся последовательностей.**

**Теорема 1.** *Сходящаяся последовательность ограничена.*

**Теорема 2.** *Пусть тогда:*

*а)б) в)*

**Теорема 3.** *Если и для всех п выполняются неравенства*

**Теорема 4.** *Если и последовательность {} — ограничена, то (произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая)*

**§ 3. Монотонные последовательности**

**1. Определение монотонных последовательностей.**

**Определение.** *Последовательность {} называется возрастающей, если ; неубывающей, если ; убывающей, если ; невозрастающей, если ;*

Все такие последовательности объединяются общим названием *монотонные*. Возрастающие и убывающие называются *строго* *монотонными.*

**2. Признак сходимости монотонных последовательностей.** \

**Теорема.** *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

**3. Число е.**

Числом **е** называется предел . Это число иррационально и приближенно равно **е**=2,71828... . Логарифмы с основанием **е** называются натуральными и обозначаются .

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Написать пять первых элементов последовательности xn = .

2. Показать, что последовательность *{an}* является бесконечно большой при | |>1 и бесконечно малой при | |<1.

3. Найти пределы: = , ,