Глава 4

ФУНКЦИЯ

**§ 1. Основные понятия**

1. **Определение функции**

**Определение.** *Пусть Χ и Υ ­– некоторые числовые множества. Функцией f называется множество упорядоченных пар чисел (x; y), таких, что x и каждое x входит в одну и только одну пару этого множества, а каждое y входит, по крайней мере, в одну пару. При этом говорят, что числу х поставлено в соответствие число у, и пишут у = f (x). Число y называется значением функции в точке х. Переменную y называют зависимой переменной, а переменную х - независимой переменной (или аргументом), множество Х - областью определения (или существования) функции, а множество Y – множеством значений функции.*

 Кроме буквы *f* для обозначения функций используют другие буквы латинского и греческого алфавитов, например: у = y(x), у = g (x), у =(x),

y = A(x), y = F(x) и т.д. Другими буквами могут обозначаться зависимая и независимая переменные. Иногда зависимую переменную также называют функцией.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянно*й. Постоянную функцию часто обозначают буквами С. (*f*(x) = C).

**Пример** **1.** Найти область определения и множество значений функции *y = sin x.*

Решение. Областью определения функции y = *sin x* является множество всех вещественных чисел, а множество значений функции есть множество всех чисел, заключенных между – 1 и 1, т.е. X = ( и Y = [–.

**Пример 2.** Найти область определения и множество значений функции у = lg x.

Решение. Областью определения функции у = lg x является множество всех положительных чисел, а множество значений функции – множество всех вещественных чисел, т.е. Х = ( 0, ) и Y = (–).

**Пример З.** Найти область определения функции

.

Решение. Так как функция представляет собой сумму функций, то область определения функции будет состоять из всех тех значений х0, которые принадлежат одновременно области определения функций

 

и . Поэтому область определения заданной функции определяется как совокупность значений х, при которых одновременно выполняются неравенства –x2 + x + 2 > 0 и х –1 > 0. Это будет интервал (1, 2).

**Пример 4.** Найти область определения функции y = arcsin .

Решение. Область определения функции определяется неравенством . Возводя в квадрат, получим 422 или 32. Решая это неравенство, найдем, что областью определения функции будет отрезок [].

1. **Четные и нечетные функции.** Функция *f*(x), заданная на симметричном относительно начала координат промежутке, называется *четной,* если для любого значения *x* из этого промежутка имеет место равенство

*f(–x)=f(x).*

График **четной** функции симметричен относительно оси Оy.

Функция *f(x)*, заданная на симметричном относительно начала координат промежутке, называется *нечетной,* если для любого значения *x* из этого промежутка имеет место равенство

*f(–x) = – f(x),*

График **нечетной** функции симметричен относительно начала координат.

Сумма и разность двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная). Действительно, пусть (x) = *f(x)+* g (x). Тогда если *f(x) и* g (x) – четные, то

(- x) = *f(- x)+* g (- x) = *f(x)+* g (x) = (x).

Если же *f(x) и* g (x) – нечетные, то (x) также будет нечетной.

(- x) = *f(- x)+* g (- x) = - *f(x)-* g (x) = (x).

Аналогичное доказательство для разности функций.

Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция. В самом деле, пусть (x) = *f(x)∙* g (x) и *f(x) и*  g (x) – четные функции. Тогда

(- x) = f(- x) g (- x) = *f(x)* g (x) = (x).

Если же f(x) *и* g (x) – нечетные функции, то

(- x) = f(- x) g (- x) = [- f(x)][- g (x)] = (x).

Если же f(x) – четная,а g (x) – нечетная функция, то

(- x) = f(- x) g (- x) = (f(x))[- g (x)] = - (x).

**Пример 5.** Доказать, что функция *f(x)=x5–x3+x* – нечетная.

Решение. Область определения функции*: –= –* - Следовательно, функция нечетная.

**Пример 6.** Доказать, что функция *f(x)= –* четная.

Решение. Область определения функции: *–=* Следовательно, функция четная.

**Пример 7.** Является ли функция *f(x)=x4+x2*, определенная в промежутке , четной?

Решение. Эта функция не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения **не симметрична** относительно начала координат. Хотя формально *f(–x)=f(x).*

**Пример 8.** Исследовать на четность и нечетность функцию

*f(x)=x2+x – 1.*

Решение. Область определения функции: *–* т. е. функция не удовлетворяет равенствам *.* Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

1. **Периодические функции.** Функция *f(x)* называется *периодической,* если существует число Т такое, что для любого значения *x* из области определения функции выполняется равенство

,

Число Т называется *периодом* функции. Если Т – период функции, то ее периодом является также и число – Т, так как .

Обычно под периодом функции понимают *наименьший* из положительных периодов, если такой период существует. Например, периодом функций sin х и cos х является число

 а для функций *tg x* и *ctg x период* – число

Если Т – период функции, то ее периодом будет также и число kT , где k - любое целое число (k 1; 2;…). Например, .

**Пример 9.** Показать, что функция *f(x)=*sin имеет период .

Решение. Имеем sin .

**§ 2. Предел и непрерывность функции**

1. **Определение предела функции.** Пусть функция *f(x)* определена на некотором промежутке Х и пусть точка х0 принадлежит или не принадлежит промежутку Х

**Определение 1.** *Число А называется пределом функции* ***f(x)*** *в точке x=x0, если для любого числа существует число такое, что для всех x0, удовлетворяющих неравенству* |x – *0*| <  *,* выполняется неравенство

**Пример 1.** Используя определение, доказать, что функция *f(x)=С* (С- некоторое число) в точке х = х0 (где х0 – любое число) имеет предел, равный С, т.е. .

Решение. Возьмем любое Тогда для любого числа выполняется требуемое неравенство . Следовательно, .

**Пример 2.** Используя определение, доказать, что функция *f(x)= х*  в точке х = х0 (где х0 – любое число) имеет предел, равный х0, т.е. х0.

Решение. Возьмем любое Тогда, если взять , то для всех х, удовлетворяющих неравенству |x - х0| < выполняется требуемое неравенство | *f(x)*- х0| = |x - х0| < . Следовательно, х0.

**Пример 3.** Используя определение, доказать, что функция *f(x)= 3х - 2*  в точке х = 1 имеет предел, равный единице, т.е. х0.

Решение. Возьмем любое Задача состоит в том, чтобы по этому найти такое , при котором из неравенства |x – 1| < следовало бы неравенство < Преобразуя последнее неравенство, получаем < |x – 1| < . Это и означает, что

 В частности, если = 1, то /3, если = 1/2, то /6 и т.д.

1. **Свойства пределов. Непрерывность функции.**

**Теорема 1.** *Пусть функции f(x) и g(x) имеют в точке x0 пределы В и С. Тогда функции имеют в точке x0 пределы, равные соответственно ВС, ВС и В/С, т.е.*

**Пример 4.** Найти

Решение. На основании теоремы 1 (предел суммы и произведения) имеем так как

**Определение 2.** *Функция f(x)* *называется непрерывной в точке x=x0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.*

**Пример 5.** Используя определение, доказать непрерывность функции 3х2 + 2х + 1 в точке х = 1.

Решение. Сначала найдем предел данной функции при х → 1:

 Затем вычислим значение функции в точке х = 1: 3∙1 + 2∙1 + 1 = 6. Видим, что предел функции и ее значение в точке х = 1 равны, то есть

**Теорема 2.** *Пусть функции f(x) и g(x) непрерывны в точке . Тогда функции также непрерывны в этой точке (частное при g(.*

**Пример 6.** Найти

Решение. Так как в точке x=π/2, т.е. предел функции 1, sin x, cos 2x непрерывны, то по теореме 2, функция в точке x=π/2, то есть предел функции и ее значение в этой точке равны, тогда, переходя к пределу, получаем

1. **Раскрытие неопределенностей вида**

**Пример 7.** Найти

Решение . Имеем неопределенность вида . Непосредственно теорему 1 (предел частного) применить нельзя. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность. Для этого разложим числитель на множители и сократим на общий множитель х + 2, который обращает в нуль знаменатель и числитель дроби. Получаем

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность раскрыта. Применяя теорему 1, окончательно находим

**Пример 8.** Найти

Решение. Имеем неопределенность вида . Разделив на x числитель и знаменатель дроби, а затем применив теорему 1, получим

**§ З. Сравнение бесконечно малых**

Функция α(x) называется *бесконечно малой* при х→x0 (или в точке x0), если . Пусть α(х) и β(x) – две бесконечно малые функции при х→x0. Тогда:

1. если , то α(x) называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем β(x);
2. если , то α(x) и β(x) называются *бесконечно малыми одного порядка*;
3. если , то α(x) и β(x) называются *эквивалентными бесконечно малыми*. Эквивалентность обозначается так: α( s ) ~ β( x ) при ;
4. если , то α(x) называется *бесконечно малой n-го порядка* относительно β(x).

 Аналогичные определения имеют место для случаев

При сравнении бесконечно малых функций часто используют символ о («о малое»). Если функция в точке – бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая β(x) в этой же точке, то это условно записывают так: = 0 (β(x)).

**Пример 1.** Доказать, что при х → 0 функция хk (k > 1) – бесконечно малая более высокого порядка, чем х.

Решение. Действительно, = 0, так как по условию k - 1 > 0.

**Пример 2.** Доказать, что при х → 0 функция sin kx и lx (k 0, l бесконечно малые одного порядка.

Решение. В самом деле,

**Пример 3.** Доказать, что при х → 0 функция sin x и tg x – эквивалентные бесконечно малые (sin x ~ tg x при х → 0).

Решение. Действительно,

**Пример 4.** Определить при х → 0 порядок бесконечно малой функции - относительно бесконечно малой х.

Решение. Требуется найти число n такое, чтобы был конечным и не равным нулю. Имеем

= -2∙2∙1∙ = - 4

При n < 2 , что не подходит, при n > 2 не годится. Только при n = 2 и искомый предел равен – 4, то есть конечен и отличен от нуля. Итак, n = 2 и функция – - бесконечно малая второго порядка относительно бесконечно малой х при

 х → 0.

**Пример 5.** С помощью замены эквивалентных найти предел

Решение. Имеем ln (1+3x) ~ 3x, sin5x ~ 5x. Поэтому = =

**Задачи для самостоятельного решения.**

Найти пределы:

1. 2. 3.

4. 5. 6.

7.