**Глава 5**

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ**

**§ 1. Понятие производной**

**Определение.** *Производной функции y=f(x) в точке называ­ется предел при отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует).*

Производная обозначается или .

Итак, но определению,

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

**Пример.** Используя определение производной, найти произ­водную функции *f(x)=x2* в точке х=.

Решение. Придавая аргументу *х* в точке *х0* приращение , найдем соответствующее приращение функции:

Составим отношение

Найдем предел этого отношения при :

Следовательно, производная функции в точке равна числу 2, что в принятых обозначениях можно записать так:.

**Задачи для самостоятельного решения.**

Используя определение производной, найти производные функций в точкех=:

1. f(x) = 5x2 2. f(x) = x3 3. f(x) = 1/x 4. f(x) = 1/x2

**§ 2. Вычисление производных**

1. **Правила дифференцирования.** Пусть u и v произвольные дифференцируемые функции, тогда:

1)

4) если функция дифференцируема в точке х0, а функ­ция *y=f(u)* дифференцируема в точке , то сложная функция дифференцируема в точке и .

1. **Формулы дифференцирования**:

*;*

**Пример.** Используя правила и формулы дифференцирования найти производные функций:

1) f(x)= 5 + x3 +3x2 + sin x + cos x + 2tg x – 3ctg x + log2 x + 3ln x;

2) f(x)= ; 3) f(x)= x sin x; 4) f(x)= x arctg x - ln(1+x2).

Решение.

1) (5 + x3 +3x2 + sin x + cos x + 2tg x – 3ctg x + log2 x + 3ln x)=

**= (**5) + (x3)+ (3x2) + (sin x) + (cos x) + (2tg x) – (3ctg x) + (log2 x) + (3ln x) 3x2 + 6x + cos x – sin x + + + log2e + ;

2) ;

**=**  = ;

3) x sin x)= (x)sin x + x (sin x) = 1∙sin x + x cos x = sin x + x cos x;

4) x arctg x)- ln(1+x2)) = (x) arctg x + x(arctg x) - (1+x2)=

= 1∙ arctg x + - = arctg x.

**Задачи для самостоятельного решения**

Найти производные функций:

1) у = х4 + 3х2 – 2х + 1 2) у = 7х7 + 3х2 – 4х – 1 3) у =

4) у = х2 log3x 5) y = √x

**§ 3. Понятие дифференциала**

Если функция дифференцируема в точке *х,* т. е. имеет в этой точке конечную производную , то ее приращение можно записать в виде

где

Главная, линейная относительно часть приращения функции называется *дифференциалом* функции и обозначается *dy:*

(1)

Положив в формуле (1) , получим окончательно соотношение (1) принимает вид

(2)

При достаточно малых приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е. .

**Пример 1.** Найти дифференциал функции в точке х=2, причем сделать это двумя способами: 1) выделяя главную, линейную относительно часть приращения функции; 2) по формуле (2).

Решение. 1) отсюда ; 2) по формуле (2), Следовательно, получаем .

**§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков**

**1. Производные высших порядков.** Производная называ­ется производной первого порядка. Производная от называет­ся производной второго порядка (или второй производной) от функции и обозначается у" или 𝑓′′(*x*). Производная от 𝑓′′(*x*) называется производной третьего порядка (или третьей производ­ной) от функции/(х) и обозначается у′′′ или 𝑓′′′(*x*) и т. д.

Производная *n*-го порядка есть производная от производной

-го порядка, т. е.

Производные начиная со второй называются производными высшего порядка.

**2. Дифференциалы высших порядков.** Дифференциал называется дифференциалом первого порядка.

Дифференциал d(d*y*) от дифференциала dу называется диф­ференциалом второго порядка функции и обозначается d2*y*, т. е.

Дифференциал от дифференциала d2у называется диф­ференциалом третьего порядка функции и обозначается ит. д.

Дифференциал от дифференциала называется

дифференциалом п-го порядка функции и обозначается .

Дифференциал n-го порядка индуктивно определяется по формуле

Откуда

т. е. n-я производная функции в некоторой точке *х* равна отношению n-го дифференциала этой функции в т. *х* к диф­ференциалу аргумента в степени n.

**Задачи для самостоятельного решения**

Найти вторые производные функций:

1) у = х4 + 3х2 – 2х + 1 2) у = 7х7 + 3х2 – 4х – 1 3) у =

4) у = х2 log3x 5) y = √x

Найти производные третьего порядка:

1) у = х32х  2) у = х2 sin x 3) y = x ln x

**§ 5. Дифференцирование функций, заданных параметрически**

Производные первого и второго порядков функции , представленной параметрически функциями , выражаются формулами

**Пример.** Найти если

Решение. Имеем

**§ 6. Основные теоремы дифференциального исчисления.**

**Правило Лопиталя. Формула Тейлора**

**1. Теорема Ферма.** *Пусть функция определена на ин­тервале (a, b) и в некоторой точке этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда если в точке суще­ствует производная, то она равна нулю, т. е. .*

**Теорема Ролля.** *Пусть на отрезке [a, b] определена функция* 𝑓*(x), причем: 1°)* 𝑓*(x) непрерывна на [a, b]; 2°)* 𝑓*(x) дифференцируема на (a, b); 3°)* 𝑓*(a)=*𝑓*(b). Тогда существует точка c(a, b), в которой .*

**Теорема Лагранжа.** *Пусть на отрезке [a, b] определена функция* 𝑓*(x), причем: 1)* 𝑓*(x) непрерывна на [a, b]; 2)* 𝑓*(x) диф­ференцируема на (а, b). Тогда существует точка c(a, b) такая, что справедлива формула*

**Теорема Коши.** Пусть функции 𝑓(x) и g(*x*) непрерывны на [a, b] и дифференцируемы на (а, *b*). Пусть, кроме того, g′(x)≠0. Тогда существует точка c(a, b) такая, что справедлива формула

**2. Правило Лопиталя.**

**Ⅰ. Раскрытие неопределенности вида Первое правило Лопиталя.**

Если когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

**Ⅱ. Раскрытие неопределенности вида . Второе правило Лопиталя.**

Если когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

Правила верны и в том случае, когда

**III. Неопределенности вида и их раскрытие.** Неопределенности вида сводятся путем алгебраических преобразований к неопределенностям вида и , а затем раскрываются с помощью правила Лопиталя.

Неопределенности вида с помощью тождества

Сводятся к неопределенности вида .

**Пример 1.** Найти

Решение. Имеем неопределенность вида . Применяя правило Лопиталя, получим

**Пример 2.** Найти

Решение. Имеем неопределенность вида . Применяя правило Лопиталя n раз, получим

Здесь уже никакой неопределенности нет. Поэтому

**Пример 3.** Найти

Решение. Имеем неопределенность вида . Но и мы уже имеем неопределенность вида

=

**Пример 4.** Найти

Решение. Имеем неопределенность вида . Но и получаем в показателе степени (!) неопределенность вида , которая нами уже рассмотрена в примере 3. Следовательно,

= = 1.

**Пример 5.** и **Пример 6.** Можно разобрать на основе файла 1024 (в формате pdf ), находящегося в системе MOODL.

**Задачи для самостоятельного решения**

Задачи с номерами 225 -:- 235 из файла 1024 (в формате pdf ), находящегося в системе MOODL.

**§ 7. Исследование функции и построение графиков**

**1. Признак монотонности функции.** Функция 𝑓(*x*) не убывает (не возрастает) на промежутке X, если для любых из

условия следует неравенство ..

Если для тех же х из условия следует неравенство то функция f(x) называется возрастающей (убывающей) на промежутке Х.

**Теорема 1.** Если функция 𝑓(*x*) дифференцируема на ( a, b) и 𝑓 (*x*)

𝑓 (*x*)на (a , b), то функция 𝑓(*x*) не убывает (не возрастает) на (a , b).

**Пример 1.** Определить промежутки, на которых функция 𝑓(*x*) = х3 – 12х + 11 возрастает и убывает.

Решение. Область определения функции – вся числовая прямая. Находим производную функции: 𝑓 (*x*) = 3х2 – 12. Из неравенства 3х2 – 12 или х2, находим |x| (либо х, откуда следует, что данная функция возрастает на интервалах (-, а из неравенства 3х2 – 12или

х2, |x|(-2 следует, что данная функция убывает на интервале

(-2, 2).

**2. Отыскание точек локального экстремума функции.** Точка х0 называется точкой строгого локального максимума (миниму­ма) функции 𝑓(*x*), если для всех *х* из некоторой δ-окрестности точки выполняется неравенство

при

Локальный максимум (max) и локальный минимум (min) объ­единяются общим названием локальный экстремум.

**Теорема 2 (необходимое условие локального экстремума).** *Если функция имеет в точке* *локальный* *экстремум и дифференцируема в этой точке*, *то .*

Точки,в которых производная функции равна нулю, принято называть *точками возможного экстремума.*

**Теорема 3** **(достаточное условие локального экстремума).** *Пусть функция дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки* *Тогда если при переходе через точку* *меняет знак с «+» на «—», то* — *точка локального максимума, если в точке меняет знак с «—» на «+», то* — *точка локального минимума, если же знак в точке* *не изменяется, то в точке* *экстремума не существует.*

**Пример 2.** Найти максимумы и минимумы следующих функций:

1) 3х4 – 4х3 – 12х2 + 2; 2) (х – 2)5.

Решение. 1) Область определения функции – вся числовая прямая. Находим производную: 12х3 – 12х2 – 24х. Решая уравнение

12х(х2-х-2) = 0, получаем три точки возможного экстремума: х1= -1, х2= 0, х3=2. Исследовав знак производной в окрестности этих точек (слева – направо) получим изменение с минуса на плюс в точке х1, с плюса на минус в точке х2, с минуса на плюс в точке х3. Следовательно, точки х1= -1 и х3= 2 есть точки локального минимума ( -3 и -30), а точка х2= 0 есть точка локального максимума, где .

2) Область определения функции – вся числовая прямая. Находим производную: 5(х – 2)4. Производная обращается в ноль в единственной точке х = 2. Так как производная положительна как слева, так и справа от этой точки, то есть при переходе через эту точку своего знака не меняет, то данная функция не имеет точек экстремума.

1. **Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.**

График функции *f(x)* имеет на интервале (a, *b)* выпуклость, напра­вленную *вниз (вверх),* если в пределах интервала *(a, b)* график лежит *не ниже (не выше)* любой касательной к графику функции на *(a,b)*.

**Теорема 4.** *Если функция f(x) имеет на интервале (а, b) вторую производную и во всех точках (a, b) то график функции имеет на (а, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).*

Точка *M (;*𝑓*())* называется *точкой перегиба* графика функ­ции 𝑓(*x*), если в точке *М* график имеет касательную и существует такая окрестность точки, в пределах которой график функции слева и справа от точки имеет разные направления выпук­лости.

**Теорема 5** **(необходимое условие точки перегиба).** *Пусть гра­фик функции f(x) имеет перегиб в точке M (;*𝑓*()) и пусть функция имеет в точке непрерывную вторую производную*. *Тогда* 𝑓′′(*x*) *в точке х0 обращается в нуль*, *т. е.* 𝑓′′()=0.

Точки *M (;*𝑓*())* графика, для которых 𝑓′′()=0, называются *критическими.*

**Теорема 6** **(достаточное условие точки перегиба).** *Пусть фун­кция f(x) имеет вторую производную в некоторой окрестности точки . Тогда если в пределах указанной окрестности* 𝑓′′(*x) име­ет разные знаки слева и справа от точки , то график функции имеет перегиб в точке M (;*𝑓*()).*

**Пример 3.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции

х2 + х + 5.

Решение. Область определения функции – вся числовая прямая. Находим производные: 2х +1; 2 >0. Так как 2 >0 при любом значении х, то график функции имеет на интервале ( - . +выпуклость направленную вниз. Точек перегиба нет.

**Пример 4.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции

х3 - 3х.

Решение. Область определения функции – вся числовая прямая. Находим производные: 3х2 -3; 6х. Из уравнения 6х = 0 получаем одну критическую точку х = 0. Слева от точки х=0, < 0. Значит график направлен выпуклостью вверх. А справа от неё, > 0. Значит график направлен выпуклостью вниз. Таким образом, при переходе через точку х=0 меняет знак. Согласно теореме 6, точка с асциссой х=0 является точкой перегиба графика рассматриваемой функции. Её координаты (0; 0). Кроме того, ясны м интервалы выпуклости; (-

**4. Асимптоты графика функции.** Прямая линия называется *асимптотой* графика функции 𝑓(*x*), если расстояние от точки *М,* лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при движении точки по графику в бесконечность.

Существует три вида асимптот: *вертикальные, горизонталь­ные* и *наклонные.*

Прямая называется *вертикальной асимптотой* графикафункции 𝑓(*x*), если хотя бы одно из предельных значений или равно +∞ или -∞.

Прямая *у=А* называется *горизонтальной асимптотой* графи­ка функции *f(x*) при , если

Прямая называется *наклонной асимптотой* графика функции 𝑓(*x*) при , если функцию *f(x)* можно представить в виде , где при .

**Теорема 7.** *Для того чтобы график функции* 𝑓(*x*) *имел при*

*наклонную асимптоту , необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:*

*.*

*Или .*

**Пример 5.** Найти асимптоты графика функции 𝑓(*x*) =

Решение. Точка х=3 – есть точка разрыва второго рода данной функции, причем

*и* ; следовательно, прямая х=3 – есть вертикальная асимптота. Так как , то график функции наклонных асимптот не имеет.

Находим горизонтальную асимптоту: . Таким образом, график данной функции имеет вертикальную асимптоту х=3 и горизонтальную асимптоту у=1.

**Пример 6.** Найти асимптоты графика функции 𝑓(*x*) =

Решение. Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальных асимптот нет. Нет и горизонтальных асимптот, так как при . Будем искать наклонные асимптоты. Пределы при и

будут различными, поэтому надо рассматривать отдельно два случая.

Находим правую асимптоту (при ):

Находим левую асимптоту (при ):

Таким образом, получаем, что график функции имеет две различ­ные наклонные асимптоты: при и при .

**5. Схема исследования графика функции.** Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить в сле­дующем порядке:

1. Найти область определения функции;
2. Найти точки пересечения графика функции с осями коор­динат;
3. Найти асимптоты;
4. Найти точки возможного экстремума;
5. Найти критические точки;
6. С помощью вспомогательного рисунка исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба;
7. Построить график, учитывая исследование.

**Задания для самостоятельной работы**

Построить по изложенной выше схеме график функции:

1. 𝑓(*x*) = 2) 𝑓(*x*) = 3) 𝑓(*x*) = x2e-x