**Глава 6**

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

**§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл**

**1.Основные сведения.** Функция F(x) называется *первообразной* для

функции f(x) на промежутке X, если для любого x∈X выполняется равенство .

**Пример.** Функция является первообразной для функции на , так как при любом .

Если F(x) – первообразная для f(x), то функция F(x)+C, где С – некоторая постоянная, также является первообразной для функции f(x), так как для любого числа С. Например, для первообразной является не только , но и функция , так как .

**Определение.** *Если функция – первообразная для функции f(x), то множество функций F(x)+C, где С – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается символом*

.

При этом функция f(x) называется *подынтегральной функцией*, f(x)dx – *подынтегральным выражением*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

Восстановление функции по ее производной, или, что то же, отыскание неопределенного интеграла, называется *интегрированием*. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.

**Пример.** Проверить, что .

*Решение*. Дифференцируя результат интегрирования , получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено верно.

**2.Основные свойства неопределенного интеграла.**

1°. .

2°. dx.

3°. .

4°. .

5°. .

**3.Таблица основных интегралов**

1. 0⋅dx = C.
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .
7. .
8. .
9. .
10. .
11. .
12. .
13. .
14. .
15. .

**§ 2. Основные методы интегрирования**

1. **Непосредственное интегрирование.** Вычисление интегралов с

помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется непосредственным интегрированием.

**Пример 1.** Вычислить интеграл

*Решение.* Применив свойства 4° и 5°, имеем

Далее, используя соответственно формулы VII, II, III, IV, XII

таблицы основных интегралов, находим

Таким образом,

Обычно все произвольные постоянные суммируют, результат

обозначают одной буквой: , поэтому окончательно получаем

**Пример 2.** Вычислить интеграл

*Решение*. Интеграл табличный. Поэтому можно переходить к непосредственному интегрированию. По формуле XVI, где a=4, получаем

**Пример 3**. Вычислить интеграл

*Решение.* Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его. Так как , то интеграл можно записать в виде

Применяя свойство 5°, имеем

Получили два табличных интеграла. По формулам IX и X находим

**Пример 4**. Вычислить интеграл

*Решение.* Так как, то

По формулам III и XII получаем

**2.Метод подстановки**. Метод подстановки (или замены переменной)

заключается в том, что заменяют x на ϕ(t), где ϕ(t) – непрерывно дифференцируемая функция. При этом, полагают dx=ϕ′(t)dt и получают

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную t. Для возвращения к переменной x необходимо заменить t значением t=Ψ(x), которое находится из соотношения x=ϕ(t).

Указанную формулу применяют также и в обратном направлении:

где – функция, обратная функции x=ϕ(t).

**Пример 5.** Вычислить интеграл

*Решение.* Интеграл не табличный. Применим подстановку t=3x; тогда Подставив в интеграл, получаем

, то есть получаем уже табличный интеграл. Применяя формулу VII таблицы основных интегралов, находим

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

Данный интеграл можно вычислить и непосредственно, заменив dx

на , т.е. внося под знак дифференциала множитель 3 и разделив на него интеграл. В результате получаем

Этот экономный и простой прием часто используется при

вычислении интегралов.

**Пример 6.** Вычислить интеграл

*Решение.* Вычислим данный интеграл непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной интегрирования. Имеем:

Данный интеграл вычисляется с помощью подстановки t=1-x2.

Существует другой несложный, но весьма эффективный прием, позволяющий упростить вычисление интегралов. Если числитель подынтегральной функции f(x) равен производной знаменателя, то справедлива формула

Действительно, используя подстановку t=f(x), dt=f′(x)dx, имеем

**Пример 7.** Вычислить интеграл

*Решение.* Так как то интеграл можно записать в виде

Замечая, что получаем

Данный интеграл можно вычислить и с помощью подстановки t=sinx, и непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной.

**Пример 8**. Вычислить интеграл

*Решение.* Полагаем Отсюда

Следовательно,

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

**Пример 9**. Вычислить интеграл

*Решение.* Имеем

Положим Находим

Выделяя делением целую часть дроби, получаем

Окончательно имеем

И вообще, если подынтегральное выражение не содержит других корней, кроме корня где a, b, c, d – некоторые числа m – натуральное число, то следует применить подстановку

**Пример 10**. Вычислить интеграл

*Решение.* Сделав подстановку получим

Далее имеем

**3.Метод интегрирования по частям**. *Формулой интегрирования по*

*частям в неопределенном интеграле* называется формула

Где u и v – дифференцируемые функции от x. Она позволяет свести вычисление к вычислению интеграла который может оказаться более простым для интегрирования.

Большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы.

1. Интегралы вида где – многочлен. Для их вычисления следует положить u равным одной из указанных выше функция, а dv=P(x)dx (см. пример 11).
2. Интегралы вида где – многочлен, а k – некоторое число. Для их вычисления следует положить u=P(x), а dv=ekxdx, d=sinkxdx, dv=coskxdx соответственно (см. пример 13).
3. Интегралы где a и b – некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрирование п частям (см. пример 12).

**Пример 11**. Вычислить интеграл

*Решение.* Положим

(здесь в качестве v можно взять любую из первообразных вида x+C, где С – произвольная постоянная. Взято v=x, т.е. С=0).

**Пример 12**. Вычислить интеграл

*Решение*. Полагая найдем

По формуле (3) получаем

**Пример 13**. Вычислить интеграл

Решение. Положим *u = ex*, *dv = cosx dx*

**Пример 14**. Вычислить интеграл

*Решение.* По рекуррентной формуле (3) имеем

окончательно получаем

**§ 3. Интегрирование рациональных функций**

Если знаменатель Q правильной рациональной дроби (имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе) может быть представлен в виде

Где А – коэффициент при старшей степени многочлена Q(x), α, β… - корни уравнения Q(x)=0, а трехчлены не имеют вещественных корней\*, то эта дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:

(1)

Где , , …, , …, , , , , …, , , … - некоторые числа, подлежащие определению. Для их определения умножают обе части последнего разложения (1) на Q(x). Так как равенство между многочленом и многочленом, который получится в правой части, справедливо для всех x, то коэффициенты, стоящие при равных степенях x, равны между собой. Таким образом получится ряд уравнений первой степени, из которых найдем неизвестные числа , , …, , …, , , , , …, , , …

Изложенный метод отыскания разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Если рациональная дробь неправильная, то следует предварительно выделить целую часть.

**Пример 1**. Вычислить интеграл

*Решение.* Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Так как квадратный трехчлен имеет комплексные корни, то по формуле (1) имеем

Где A, B, C, D, E – коэффициенты, подлежащие определению.

Умножая обе части равенства на , получаем

Или

Сравнивая коэффициенты при придем к системе уравнений

Решая эту систему, найдем , B=0, C=1, D=-1, E=0, поэтому искомое разложение имеет вид:

Следовательно,

**§ 4. Определенный интеграл**

1. **Определение определенного интеграла.** Пусть функция f(x) определена на отрезке Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками В каждом из полученных частичных отрезков выберем произвольную точку и составим сумму

(1)

где Сумма вида (1) называется интегральной суммой для функции f(x) на .

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: .

**Определение*.*** *Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при: , то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) по отрезку и обозначается следующим образом*:

В этом случае функция f(x) называется интегрируемой на . Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования,* f(x) - *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*.

Для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на отрезке .

**Пример**. Используя определение, вычислить интеграл

*Решение.* Разобьем отрезок на n произвольных частей точками и составим соответствующую интегральную сумму (1). Так как подынтегральная функция f(x)=С постоянна, то для любого выбора промежуточных точек получим интегральную сумму вида

далее имеем

Видим, что интегральная сумма для данной функции не зависит ни от разбиения, ни от выбора точек и равна . Следовательно, и ее предел при: равен той же величине.

Таким образом, по определению

1. **Основные свойства определенного интеграла.**

1°. По определению,

2°. По определению,

3°. Каковы бы ни были числа a, b, c, всегда имеет место равенство

4°. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

5°. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

1. **Формула Ньютона-Лейбница.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке и функция F(x) является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона-Лейбница*

**Пример.** Вычислить интеграл

*Решение.* Так как одной из первообразных для функции f(x)=sinx является функция F(x)=-cosx, то, применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

**§ 5. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла**

1. **Формулы площадей плоских фигур.**

(1)

где S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x), отрезком на оси Ox и прямыми x=a, x=b, a<b.

(2)

где S – площадь фигуры, заключенной между графиками функции и , прямыми x=a и x=b,

(3)

где S – площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрическими уравнениями

(4)

где S – площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы α и β.

**Пример 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

*Решение*. Можно считать, что эта фигура ограничена осью Ox, прямыми x=-1, x=1 и графиком функции f(x)=1-x2, поэтому, по формуле (1), ее площадь

**Пример 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды и осью Ox.

*Решение.* По формуле (3) имеем

1. **Формулы длин дуг плоских кривых.**

(5)

где L – длина кривой, заданной уравнением y=f(x),

(6)

Где L – длина кривой, заданной параметрическими уравнениями

(7)

Где L – длина кривой, заданной в полярных координатах уравнением

**Пример 5.** Найти длину дуги полукубической параболы

*Решение.* Кривая симметрична относительно оси Ox. Найдем длину верхней ветви кривой. Из уравнения находим По формуле (5) получим

1. **Формулы объемов тел вращения.**

(8)

Где V – объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox. Дифференциал переменного объема

**Пример**. Найти объем тела, образованного вращением эллипса вокруг оси Ox.

*Решение.* Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти половину искомого объема. По формуле (8) имеем

Следовательно, откуда Если a=b=R, то эллипс является окружностью. Тогда объем тела вращения окружности вокруг оси Ox есть шар, объем которого

1. **Формулы площадей поверхностей вращения.**

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением у=, a≤ x≤ b, вокруг оси Ох.

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной параметрическими уравнениями x=, , вокруг оси Oy.

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнениями

где S — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением в полярных координатах

**Пример.** Часть сферы, вырезаемая двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии *Н* друг от друга, называется шаровым поясом высоты *Н*. Найти площадь поверхности шарового пояса, если радиус шара равен *R*, а высота пояса равна *Н*.

*Решение.* Поверхность шарового пояса можно рассматривать как поверхность тела, полученного вращением дуги окружности , где , , вокруг оси Ох. Так как , то поэтому, согласно формуле,

Итак, площадь поверхности S шарового пояса находится по формуле . Если , то в пределе получим площадь поверхности всей сферы: .

1. **Формула работы переменной силы.**

где *А* — работа переменной силы *F(x)* на отрезке *[а, b].*

**Пример.** Определить работу *А,* необходимую для запуска тела массой *т* с поверхности Земли вертикально вверх на высоту *h*.

*Решение*. Обозначим через *F* силу притяжения тела Землей. Пусть — масса Земли. Согласно закону Ньютона,

где *х* — расстояние от тела до центра Земли. Полагая , получаем , , где *R-*радиус Земли. При сила равнавесу тела , т.е. , откуда , и

Таким образом, по формуле получаем

**§ 6. Несобственные интегралы**

1. **Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.** По определению,

где *С-* любое число. Если приведенные пределы существуют и конечны, то их называют несобственными *интегралами первого рода*. В этом случае соответствующие интегралы называют *сходящимися*. В противном случае - *расходящимися*

**Пример 1.** Исследовать сходимости

*Решение*. По определению имеем

Т.е. интеграл сходится.

2. **Несобственные интегралы от неограниченных функций.**

Если функция 𝑓(*x*) определена на промежутке [а, b), интегрируема на любом отрезке [а, b-ε], заключенном в [а, b), и не ограничена слева от точки b (ее называют особой), то, по определению,

Если этот предел существует н конечен, то его называют несобственным интегралом второго рода, а интеграл называется сходящимся. В противном случае — расходящимся.

Аналогично, если х=а — особая точка, то, по определению,

Если внутренняя точка отрезка [а, *b*] — точка х=с — особая, то, по определению,

Наконец, если *а* и *b* — особые точки, то несобственный интеграл определяется как сумма:

где *с*-любая точка из (*a, b*).

**Пример 2.** Исследовать сходимость

*Решение.* Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки х= 1, т. е. «обращается в бесконечность». Поэтому точка *x=*1 особая. На любом же отрезке [0,1-ε] она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению имеем

Следовательно, интеграл сходится.

1. **Признак сходимости несобственных интегралов.**

**Теорема (признак сравнения несобственных интегралов).** *Если функции f(x) и g(x) непрерывны на промежутке [о, + ∞) и удовлетворяют на нем условию , то из сходимости интеграла*

*следует сходимость интеграла*

*а из расходимости интеграла следует расходимость интеграла.*

**Пример.** Исследовать сходимость

*Решение*. Сравним подынтегральную функцию c функцией на [1, +∞). Очевидно, что

Но интеграл сходится, так как а=2> 1.

Следовательно, согласно признаку сравнения, сходится и данный Интеграл.

Аналогичный признак сравнения имеет место для несобственных интегралов второго рода.

**§ 7. Приближенное вычисление определенных интегралов**

1. **Формула трапеций.**

где — равноотстоящие ординаты функции на отрезке [а, b]. Погрешность формула трапеции не больше чем

где k — наибольшее значение |𝑓′′(*x*)| на отрезке [а, b].

1. **Формула Симпсона.**

Или в развернутом виде

Погрешность формулы Симпсона не больше чем

Где М - наибольшее значение .