ЭК-19 25.11.20

Приложение двойного интеграла

1). Площадь плоской фигуры

а). Если фигура ограничена областью D, то площадь данной фигуры вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dx\,dy \rightarrow$$ это площадь фигуры D.

Если область задана в прямоугольных координатах $D: \{ a \le x \le b;\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \}$

$$S = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy =$$

$\underline{f(x,y)=1}$

$$= \int_a^b dx\ y \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$$

б) Если область D задана в полярных координатах $D: \{ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2;\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr$$

$\underline{r \text{ - якобиан}}$

2) Объем цилиндрического тела

Если фия $y = f(x,y) > 0$ в ограниченной области D, то объем цилиндр. тела, ограниченного снизу областью D, сверху – частью поверхности $z=f(x,y)$, с боков – вертикальными отрезками прямых, соединяющих границы этой поверх-ти и области D, равен

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$$

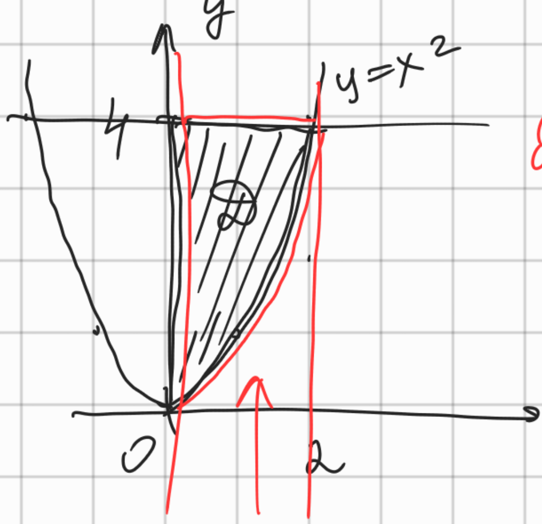
(для полярных координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$

$J=r$

$$V=\iint\limits_{D(x,y)} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D(r,\varphi)} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r\,d\varphi\, dr)$$

Задачи

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$, $y=4$, $x=0$ (ось OY)



$$D:\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x^2\le y\le 4\end{cases}$$

$$S_D=\iint\limits_{D} dxdy=\int_0^2 dx\int_{x^2}^4 dy=$$

$$=\int_0^2 y\Big|_{x^2}^{4}dx=\int_0^2 (4-x^2)\,dx=$$

$$\boxed{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

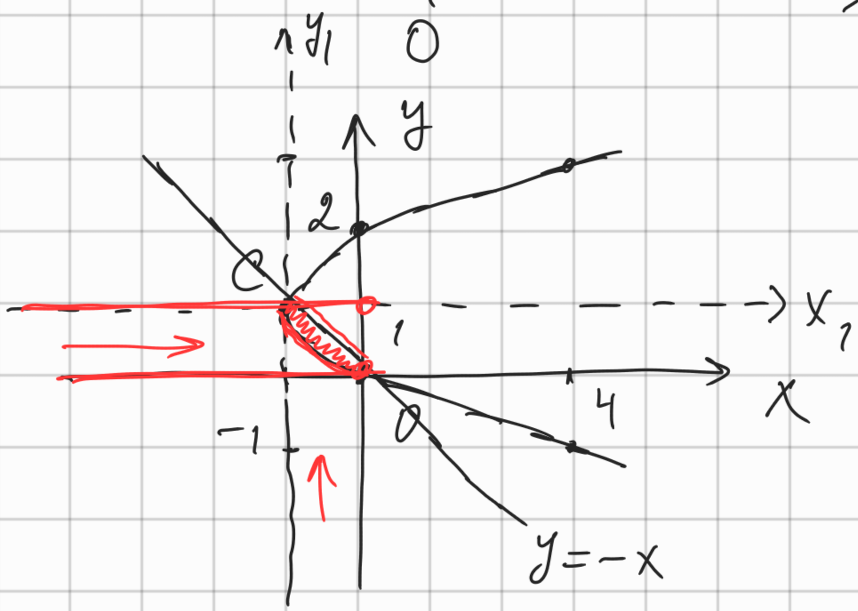
$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=$$

$$=8-\frac{8}{3}=\frac{24-8}{3}=\boxed{\frac{16}{3}}$$

2. D: $x = y^2 - 2y$ $\quad x + y = 0$ $\quad S_D - ?$

$x = y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$ $\quad C(-1;1)$ – вершина. ветви вправо.

$(y-1) = 0$



$x_1 = y_1^2$

$y_1 = 2$ $\quad y_1 = -2$

$x_1 = 4$ $\quad x_1 = 4$

$y = -x$

$x = -y$

$$\left.\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 - 2y \le x \le -y \end{cases}\right\} D$$

$$S_D = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^2-2y}^{-y} dx =$$

$y^2 - 2y = -y$ (находим точки пересечения)

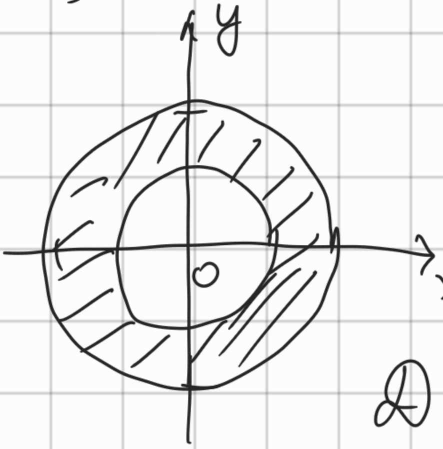
$y^2 - y = 0$

$y(y-1) = 0$ $\quad y_1 = 0$, $y_1 = 1$

$$= \int_0^1 dy\, x\Big|_{y^2-2y}^{-y} = \int_0^1 (-y - y^2 + 2y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (y - y^2)\,dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

3) Найти S–? области D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$



$$\underline{x^2+y^2=r^2}$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\underline{J = r}$

$D: \begin{pmatrix} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{pmatrix}$ $\qquad D:$ $r^2=4,\ r=2$; $r^2=1,\ r=1$

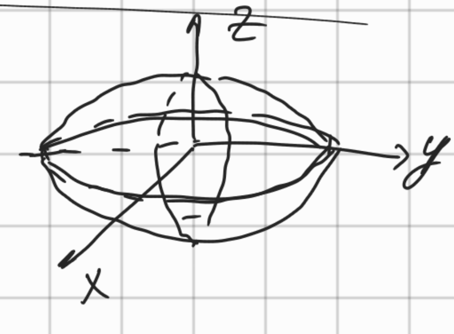
$$S_D = \iint\limits_{D(x,y)} dx\,dy = \iint\limits_{D(r,\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r\,dr =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_1^2 = 2\pi\left(2-\frac{1}{2}\right) = 2\pi\cdot\frac{3}{2} = \underline{3\pi}$$

$S_{кр} = \pi R^2$ $\qquad S_1 = 4\pi$, $R=2$ $\qquad S_2 = \pi$, $R=1$ $\qquad S = S_1 - S_2 = 3\pi$

Д/з: Конспект лекций <u>Письменный Д.</u> часть 1.

Тема: Поверхности второго порядка

название	формулы	рисунок
1. Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	

≈10

4) площадь S_D : D: $x^2+y^2=x$

$\underline{x^2+y^2}$ $\qquad$ $x^2+y^2=2x$

$x^2+y^2-x=0 \qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+y^2=0$

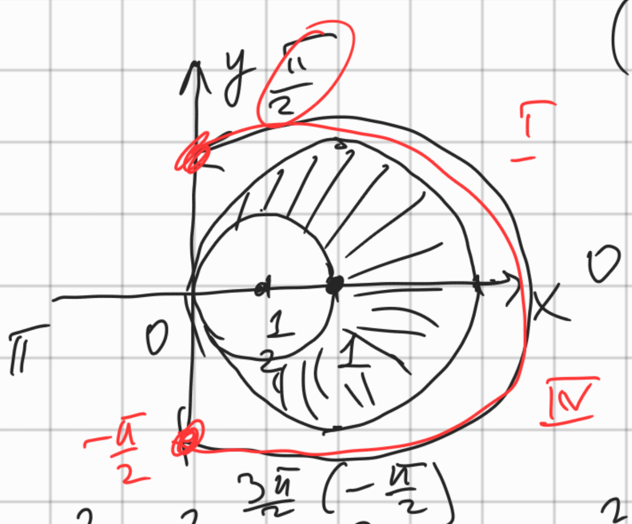
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \qquad C_1\left(\frac{1}{2};0\right)$

$R_1=\frac{1}{2}$

$x^2+y^2-2x=0 \qquad (x-1)^2-1+y^2=0$

$(x-1)^2+y^2=1 \qquad C_2(1;0)$

$R_2=1$



переходим к полярным координатам

$x=r\cos\varphi \quad y=r\sin\varphi$

$\underline{J=r}$ якобиан

$\underline{x^2+y^2=r^2}$

$x^2+y^2-x=0$

$r^2-r\cos\varphi=0$

$r^2=r\cos\varphi$

$\underline{r_1=\cos\varphi}$

$x^2+y^2-2x=0$

$r^2-2r\cos\varphi=0$

$r^2=2r\cos\varphi$

$\underline{r_2=2\cos\varphi}$

$\underline{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}$

$D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ \cos\varphi\le r\le 2\cos\varphi \end{cases}$

$S=\iint\limits_{D(x,y)} dx\,dy=\iint\limits_{D(r,\varphi)} r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r\,dr=$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2\varphi - \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2\varphi\, d\varphi = \left(\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{3}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

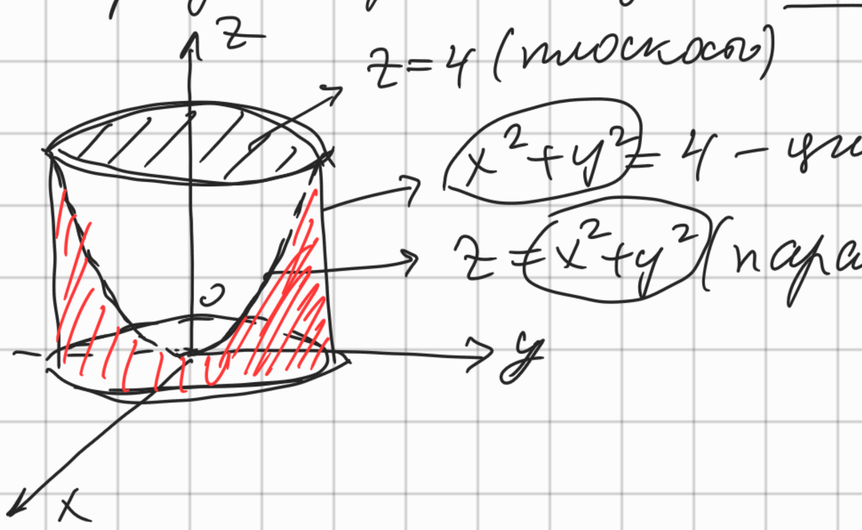
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\overset{=0}{\sin\pi}}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\overset{=0}{\sin(-\pi)}}{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\pi = \frac{3\pi}{4}$$

5) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $x^2+y^2=4$, $z=x^2+y^2$

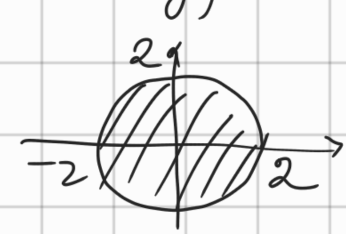
$x^2+y^2=4$ — это круговой цилиндр радиуса 2

ограничен снизу плоскостью $z=0$ (пл-ть xOy)

и сверху — параболоидом $z=x^2+y^2$



$z=f(x,y)$



$$V_{тел} = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} z\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} (x^2+y^2)\,dxdy$$

$D: \left(x^2+y^2 \le 4,\ z=0\right)$

переходим к полярным координатам

$r^2 \le 4$

$$\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$V = \iint\limits_{D(x,y)} (\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})\,dxdy = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}\ \underbrace{\int_0^{2} r^2 \cdot r\,dr} =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2} = 2\pi \cdot \frac{2^4}{4} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

Д/з. 1) S_D: D: $x^2+y^2=y$

2) V: $y=1+x^2$, $z=3x$, $y=5$, $z=0$ в первом октант (все полож.)

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 1+x^2 \le y \le 5 \end{cases}$$