ВК-19 3.12.20

Приложения двойного интеграла:
Физические приложения дв. интеграла

а) Масса пластинки с переменной плотностью $\mu(x,y)$:

$$m = \iint_D \mu(x,y)\,dx\,dy$$

б) Статические моменты относительно осей OX, OY

$$M_x = \iint_D y\,\mu(x,y)\,dx\,dy \qquad M_y = \iint_D x\,\mu(x,y)\,dx\,dy$$

в) Координаты центра тяжести (центра масс)

$$x_c = \frac{M_y}{m} \qquad y_c = \frac{M_x}{m}$$

г) Моменты инерции относительно осей OX, OY и начала координат:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x,y)\,dx\,dy; \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x,y)\,dx\,dy$$

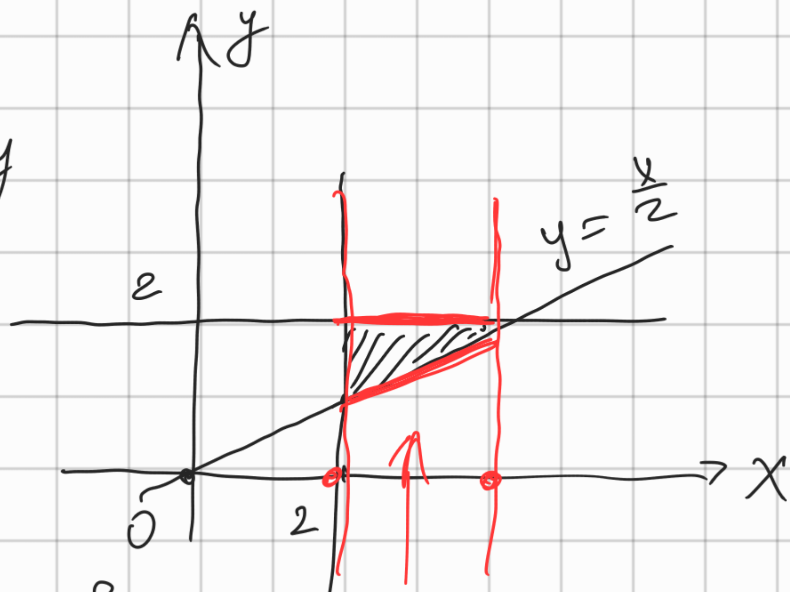
$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,dx\,dy$$

Если пластинка однородна, то $\mu(x,y) = 1$.

Задачи 1). Найти момент инерции фигуры, ограниченной области

D: $y = \frac{x}{2}$; $x = 2$; $y = 2$ относительно оси OY

$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy$$



$$\begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ \frac{x}{2} \le y \le 2 \end{cases} : D$$

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_2^4 x^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2} dy = \int_2^4 x^2 y \Big|_{\frac{x}{2}}^{2} dx =$$

$$= \int_2^4 x^2\left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = \int_2^4 \left(2x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx =$$

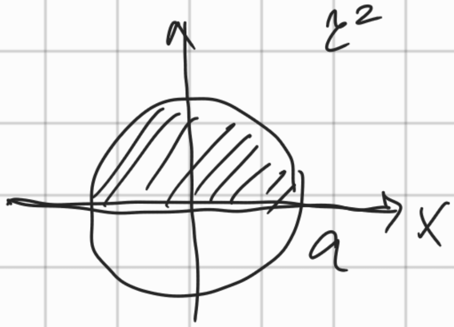
$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\Big|_2^4 = \frac{2 \cdot 64}{3} - \frac{256}{8} - \frac{16}{3} + 2 =$$

$128 - 16 = 112$

$$= \frac{112}{3} - 30 = \frac{112 - 90}{3} = \boxed{\frac{22}{3}}$$

2) Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной областью

$D: (x^2+y^2=a^2,\ y=0)$



$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$Y = r$

$X_c = \frac{M_y}{m} \qquad y_c = \frac{M_x}{m}$

$m = \iint\limits_D dx\,dy \qquad M_y = \iint\limits_D x\,dx\,dy$

$M_x = \iint\limits_D y\,dx\,dy$

$0 \le r \le a$

$0 \le \varphi \le \pi$

$m = \int_0^\pi d\varphi \int_0^a r\,dr = \varphi \Big|_0^\pi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^a = \boxed{\pi \cdot \frac{a^2}{2}}$

$M_x = \int_0^\pi d\varphi \int_0^a r\,r\sin\varphi\,dr = \int_0^\pi \sin\varphi\, \frac{r^3}{3}\Big|_0^a d\varphi =$

$= (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi \frac{a^3}{3} = (-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1})\frac{a^3}{3} =$

$= \boxed{\frac{2a^3}{3}}$

$M_y = \int_0^\pi d\varphi \int_0^a r \cdot r\cos\varphi\,dr = \int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi \int_0^a r^2 dr$

$$= \sin\varphi \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{a} = (\underset{0}{\sin\pi} - \underset{0}{\sin 0}) \cdot \frac{a^3}{3} = 0$$

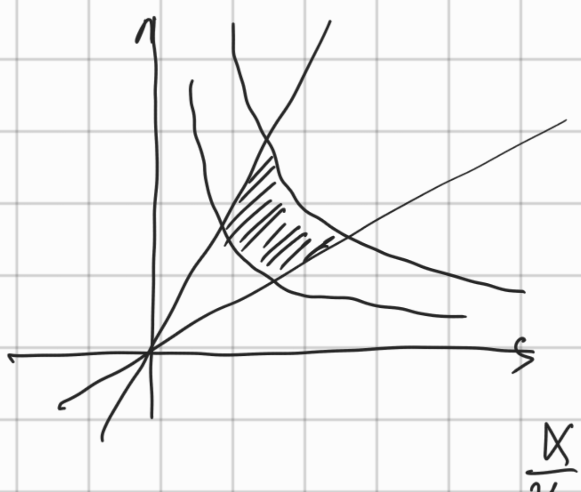
$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{m} = 0 \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{2}} =$$

$$= \frac{4a}{3\pi} \qquad \left(0;\ \frac{4a}{3\pi}\right)$$

3) Найти моменты инерции I_x, I_y однородной фигуры, ограниченной линиями

$$xy = a^2 \quad xy = 2a^2 \quad x = 2y \quad 2x = y \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$y = \frac{a^2}{x} \quad y = \frac{2a^2}{x} \quad y = \frac{x}{2} \quad y = 2x$$



Сделаем замену

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{x}{y} = v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a^2 \le u \le 2a^2 \\ \frac{1}{2} \le v \le 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x}{y} = 2 \qquad \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} xy = u \\ x = vy \end{cases} \qquad vy^2 = u \qquad y^2 = \frac{u}{v} \qquad \left\{ y = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \right.$$

$$x = v \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} x = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \\ y = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4} v^{-1} - \frac{1}{4} v^{-1} = -\frac{1}{2} v^{-1} = \frac{-1}{2v}$$

$$I_x = \iint_D y^2 dx\,dy = \int_{a^2}^{2a^2} du \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2v} \cdot u \cdot v^{-1} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} u\,du \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} \Big|_{a^2}^{2a^2} \cdot \left(-\frac{1}{v}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(4a^4 - a^4)\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{3a^4}{4} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{9a^4}{8}}$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy = \int_{a^2}^{2a^2} du \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2v}\cdot u \cdot v\,dv$$

$$= \int_{a^2}^{2a^2} u\,du \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}\,dv = \frac{u^2}{2}\Big|_{a^2}^{2a^2} \cdot \frac{1}{2}v\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} =$$

$$= \left(\frac{4a^4}{2} - \frac{a^4}{2}\right)\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3a^4}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{9a^4}{8}}$$

РГР „Двойные интегралы"