ЗК-19 9.12.20

Криволинейные интегралы

Рассмотрим на плоскости OXY гладкую кривую L, на которой определена ограниченная функция $z = f(x, y) = f(M)$.

Разобьем L на произвольные части $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots \Delta l_n$. Выберем в каждой части произвольную точку $M_i = M(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму: $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$ обозначим

$\lambda = \max \Delta l_i$

$\underline{\underline{О}}$ Если существует конечный предел I интегральной суммы при $\lambda \to 0$, то этот предел наз-ся криволинейным интегралом I рода от ф-ии $f(M) = f(x, y)$ по кривой L и обозначается

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = \int_L f(M)\,dl = \int_L f(x, y)\,dl$$

Интеграл не зависит от направления обхода кривой $l = AB$

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{BA} f(x, y)\,dl$$

Свойства интеграла – линейность и аддитивность – аналогичны свойствам др. видов интегралов

1. $\int\limits_L (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))\,dl = \int\limits_L f_1(x,y)\,dl \pm$
$\pm \int\limits_L f_2(x,y)\,dl$ (линейность)

2. $\int\limits_L c\, f(x,y)\,dl = c \int\limits_L f(x,y)\,dl$ (линейность)

3. $\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)\,dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)\,dl$

$L = L_1 \cup L_2$, где L_1 и L_2 имеют единствен. общую точку
(аддитивность)

4. $\int\limits_L dl$ = длина кривой L

Физический смысл: если $f(x,y) > 0$, то криволинейный интеграл 1 рода $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ представляет собой массу кривой L, имеющей переменную линейную плотность $\rho = f(x,y)$

Если кривая L задана в пространстве, то крив. интеграл 1 рода зависит также и от z
$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$$

Криволинейный интеграл 1 рода вычисляется

С помощью определенного интеграла.

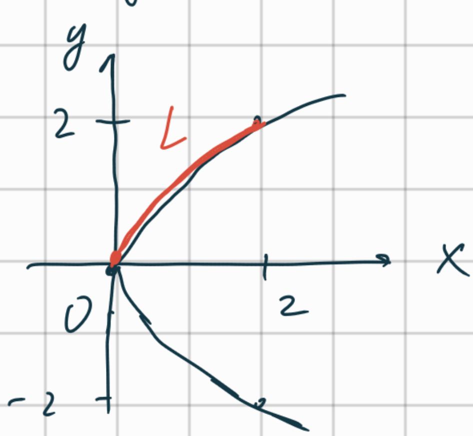
1) Пусть поверхность L задается уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, тогда

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \qquad (1)$$

2) Если кривая L задана параметрически L: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то имеем:

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \qquad (2)$$

Задачи 1) $\int_L y\,dl$, где L - дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0;0)$ до точки $(2;2)$



$y = \sqrt{2x}$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$0 \le x \le 2$

$$\int_L y\,dl = \int_0^2 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx$$

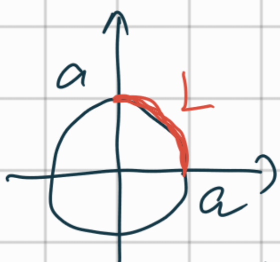
$$= \int_0^2 \cancel{\sqrt{2x}}\,\frac{\sqrt{2x+1}}{\cancel{\sqrt{2x}}}\,dx = \int_0^2 \sqrt{2x+1}\,dx =$$

$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

$$= \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(2x+1)\sqrt{2x+1}\,\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

2) $\int\limits_L y^2\,dl$, где $L = AB$ – часть окружности

$x = a\cos t,\ y = a\sin t \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$



Воспользуемся формулой (2)

$x'(t) = -a\sin t$

$y'(t) = a\cos t$

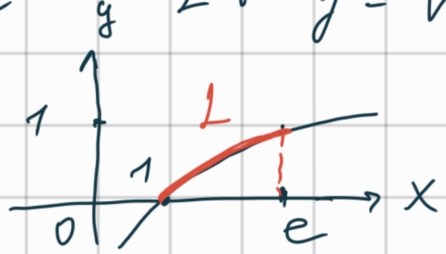
$$\int\limits_L y^2\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{\underbrace{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}_{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t) = 1}}\,dt =$$

$$= a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \left(\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) =$$

$$= a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\overset{=0}{\sin\pi}}{2}\right) = \frac{a^3\pi}{4}$$

3) $\int\limits_L x^2\,dl$ $\quad L:\ y = \ln x \qquad 1 \le x \le e$



Воспольз-ся (1)

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int_L x^2 dl = \int_1^e x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_1^e x^2 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx =$$

$$= \int_1^e x\sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{x^2+1}\, d(x^2+1) = (x^2+1 = t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2} t\sqrt{t} = \frac{1}{2}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\Big|_1^e =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left((e^2+1)\sqrt{e^2+1} - 2\sqrt{2}\right)}$$

4) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\, dl$ $\quad L: \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

$$x' = a(\cancel{-\sin t} \cancel{+ \sin t} + t\cos t) = a t\cos t$$

$$y' = a(\cancel{\cos t} \cancel{- \cos t} + t\sin t) = a t\sin t$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2}$$

$$= a\sqrt{\cos^2 t \cancel{+ 2\cos t \cdot t \cdot \sin t} + t^2\sin^2 t +}$$

$$\overline{+ \sin^2 t \cancel{- 2\sin t \cdot t \cdot \cos t} + t^2\cos^2 t} =$$

$$= a\sqrt{1 + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = a\sqrt{1+t^2}$$

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\, dl =$$

$$= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+t^2}\sqrt{a^2t^2(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1})}\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\cdot t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,d(t^2+1) =$$

$$= (t^2+1=u) = \frac{a^2}{2}\int\sqrt{u}\,du = \frac{a^2}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\,u\sqrt{u} =$$

$$= \frac{a^2}{3}(t^2+1)\sqrt{t^2+1}\,\Big|_0^{2\pi} = \underline{\frac{a^2}{3}\left((4\pi^2+1)\sqrt{4\pi^2+1}-1\right)}$$

5) $\displaystyle\int_L \frac{\cos^2 x\,dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $\qquad L:\ y=\sin x \quad 0\le x\le \pi$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$y' = \cos x$$

$$\int_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dl = \int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{\cancel{\sqrt{1+\cos^2 x}}}\,\cancel{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$= \frac{1}{2}\left(\pi + \sin\frac{\overset{\to 0}{2\pi}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Дз : 1) $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right) dl$

$L:\quad x = 2\cos t,\ y = 2\sin t\quad z = \frac{t}{4}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$

2) $\int\limits_L (x+y)\, dl$ $\qquad L$ - відрізок прямої

$y = 2x - 1 \quad -1 \le x \le 2$