3к-19 17.12.20

1. $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right) dl$

$L:$ $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = \frac{t}{4}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$

$x' = -2\sin t \quad y' = 2\cos t \quad z' = \frac{1}{4}$

$\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{16}} = \sqrt{4\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} + \frac{1}{16}}$

$= \sqrt{4 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

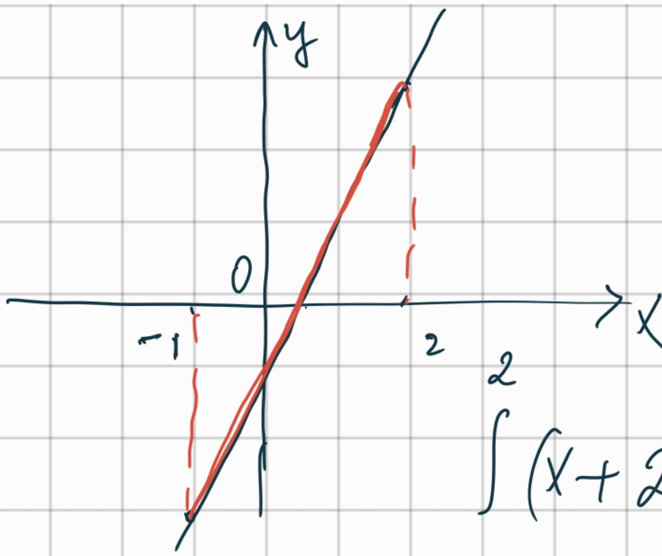
$\int\limits_0^{\pi/2} \left(2 \cdot \frac{t}{4} - \underbrace{\sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}}_{=2}\right) \frac{\sqrt{65}}{4}\, dt =$

$= \frac{\sqrt{65}}{4} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{t}{2} - 2\right) dt = \frac{\sqrt{65}}{4} \left[\frac{t^2}{4} - 2t\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$

$= \frac{\sqrt{65}}{4}\left(\frac{\pi^2}{16} - \pi\right) = \frac{\sqrt{65}\left(\pi^2 - 16\pi\right)}{64}$

2. $\int\limits_L (x+y)\, dl$ $\quad L:$ отрезок прямой

$y = 2x - 1 \quad -1 \le x \le 2$



$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$y'=2$$

$$\int\limits_{-1}^{2}(x+2x-1)\sqrt{5}\,dx=$$

$$=\sqrt{5}\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\sqrt{5}\left(6-2-\frac{3}{2}-1\right)=\sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

§2. Криволинейный интеграл II рода

Пусть на гладкой кривой l определены ограниченные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Разобьем l на произвольные части с длинами Δl_i и обозначим их проекции на оси OX и OY через Δx_i и Δy_i. Выберем в каждой части произвольную точку $M_i=M(\xi_i,\eta_i)$

ξ η и составим интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i$$

Пусть $\lambda=\max\Delta l_i$

<u>О</u> Конечный предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

при $\lambda \to 0$ называется криволинейным интегралом II рода и обозначается

$$I = \int_{l} P(x,y)\,dx \quad \text{или} \quad I = \int_{l} Q(x,y)\,dy$$

Сумму интегралов

$$\int_{l} P(x,y)\,dx + \int_{l} Q(x,y)\,dy = \int_{l} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

называют общим криволинейным интегралом II рода

В пространстве

$$\int_{l} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

Крив. интеграл II рода обладает свойствами линейности и аддитивности, а также меняет знак при изменении обхода кривой $l = AB$:

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = -\int_{BA} P(x,y)\,dx$$

1). Если кривая l задается уравнением $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$, то интеграл вычисляется по формуле

$$dy = \varphi'(x)\,dx$$

$$\int_l P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,\underbrace{dy}_{y'dx} = \int_a^b \Big[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\Big]\,dx \qquad (1)$$

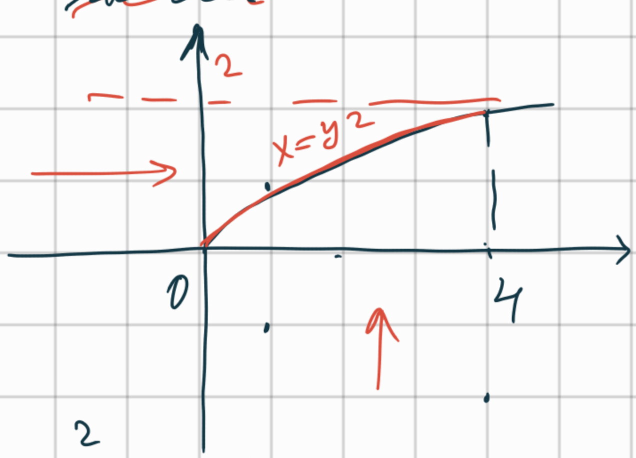
2) Если кривая l задана параметрически $x = x(t)$ $y = y(t)$ $t_1 \le t \le t_2$, то интеграл вычисляется по формуле

$$dx = x'dt \qquad dy = y'dt$$

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \Big[P(x(t),y(t))\,x' + Q(x(t),y(t))\,y'\Big]dt \qquad (2)$$

Задачи. 1). Вычислить $\int_l x^2y\,dx + x^3dy$

$l:\ y^2 = x,\ 0 \le x \le 4,\ y \ge 0$



$0 \le y \le 2$

$dx = x'dy = 2y\,dy$

$$= \int_0^2 (y^2)^2 y\, 2y\,dy + (y^2)^3 dy = \int_0^2 (2y^6 + y^6)\,dy =$$

$$= 3\int_0^2 y^6\,dy = \frac{3y^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{3}{7}\cdot 128 = \boxed{\frac{384}{7}}$$

2) $\int\limits_l y^2dx + (x^2+z)dy + (x+y+z^2)dz$

l - отрезок прямой в пр-ве от (.) $A(1;0;2)$ до (.) $B(3;1;4)$

$1 \le x \le 3$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2} \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} = t$$

в параметрическом виде ур пр имеет вид

$\frac{x-1}{2} = t$ $\qquad x = 2t+1$ $\qquad l \begin{cases} \to 1 = 2t+1 \\ \to 3 = 2t+1 \end{cases} \Rightarrow ?\,t$

$\frac{y}{1} = t$ $\qquad y = t$

$\frac{z-2}{2} = t$ $\qquad z = 2t+2$

движ от (.) A к (.) B

$t=0 \quad t=1 \quad \boxed{0 \le t \le 1}$

$x' = 2 \quad y' = 1 \quad z' = 2$

$dx = x'dt$

$dy = y'dt$

$dz = z'dt$

$$\int\limits_l y^2dx + (x^2+z)dy + (x+y+z^2)dz =$$

$$= \int_0^1 t^2\cdot 2dt + \left((2t+1)^2 + 2t+2\right)dt + \left(2t+1+t+(2t+2)^2\right)2dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2t^2 + 4t^2 + 4t + 1 + 2t + 2 + 4t + 2 + 2t + 8t^2 + 16t + 8\right) dt = \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13)\, dt =$$

$$= \left(\frac{14t^3}{3} + \frac{28t^2}{2} + 13t\right)\Big|_0^1 = \frac{14}{3} + 14 + 13 = \frac{14}{3} + 27 =$$

$$= \boxed{\frac{95}{3}}$$

3) $\int_l xy\,dx + xz\,dz + yz\,dy$

$l: \ x = \cos t \quad y = \sin t, \ z = 1 \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$dx = x'dt \quad dy = y'dt \quad dz = z'dt$

$dx = -\sin t\,dt \quad dy = \cos t\,dt \quad dz = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t(-\sin t)\,dt + \sin t \cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t \cos t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t)\,d\sin t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,d\sin t =$$

$$= \left(-\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^2 t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{2} =$$

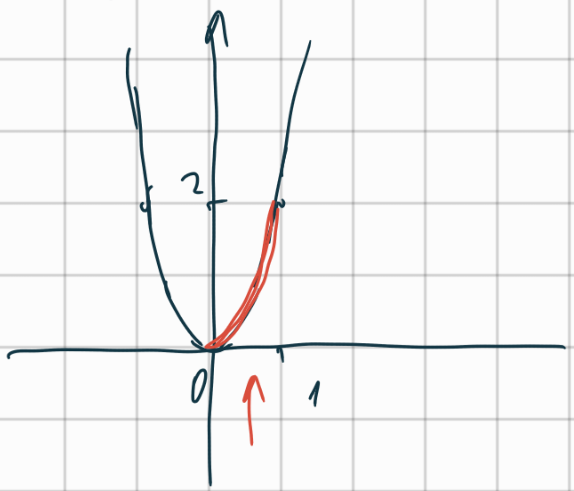
$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$$

4) $\displaystyle\int_{\ell} \frac{y\,dx}{x} + x\,dy$

ℓ: дуга параболы $y = 2x^2$ от $O(0;0)$ до $A(1;2)$

$0 \le x \le 1 \quad (0 \le y \le 2)$

$dy = y'\,dx = 4x\,dx$



$$\int_0^1 \frac{2x^2}{x}\,dx + x \cdot 4x\,dx = \int_0^1 (2x + 4x^2)\,dx =$$

$$= \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

Д/з:

1) $\displaystyle\int_{\ell} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

ℓ: $x = t,\ y = t^2,\ z = t \quad 0 \le t \le 1$

2) $\displaystyle\int_{\ell} y\,dx + \frac{x\,dy}{y}$ $\quad \ell$: часть кривой $y = e^{-x}$ от $A(0;1)$ до $B(-1;e)$

3) $\displaystyle\int_{\ell} \frac{ds}{x-y}$ $\quad K$: $y = \frac{x}{3} - 3$ от $A(0;-3)$

80 B(9;0)