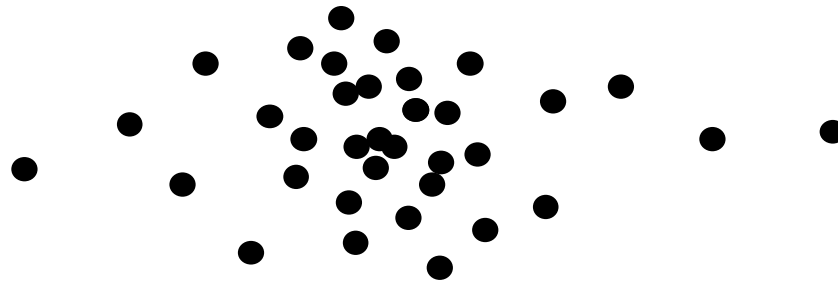
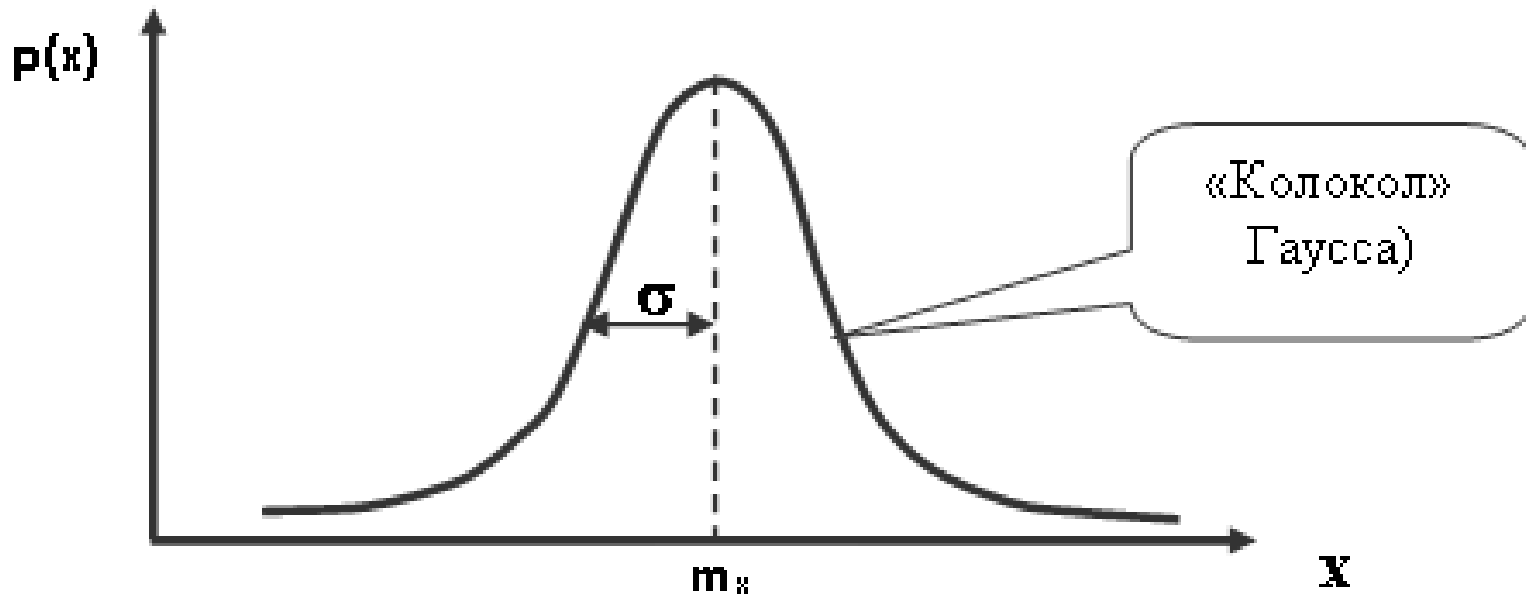


# ОЦЕНКА СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

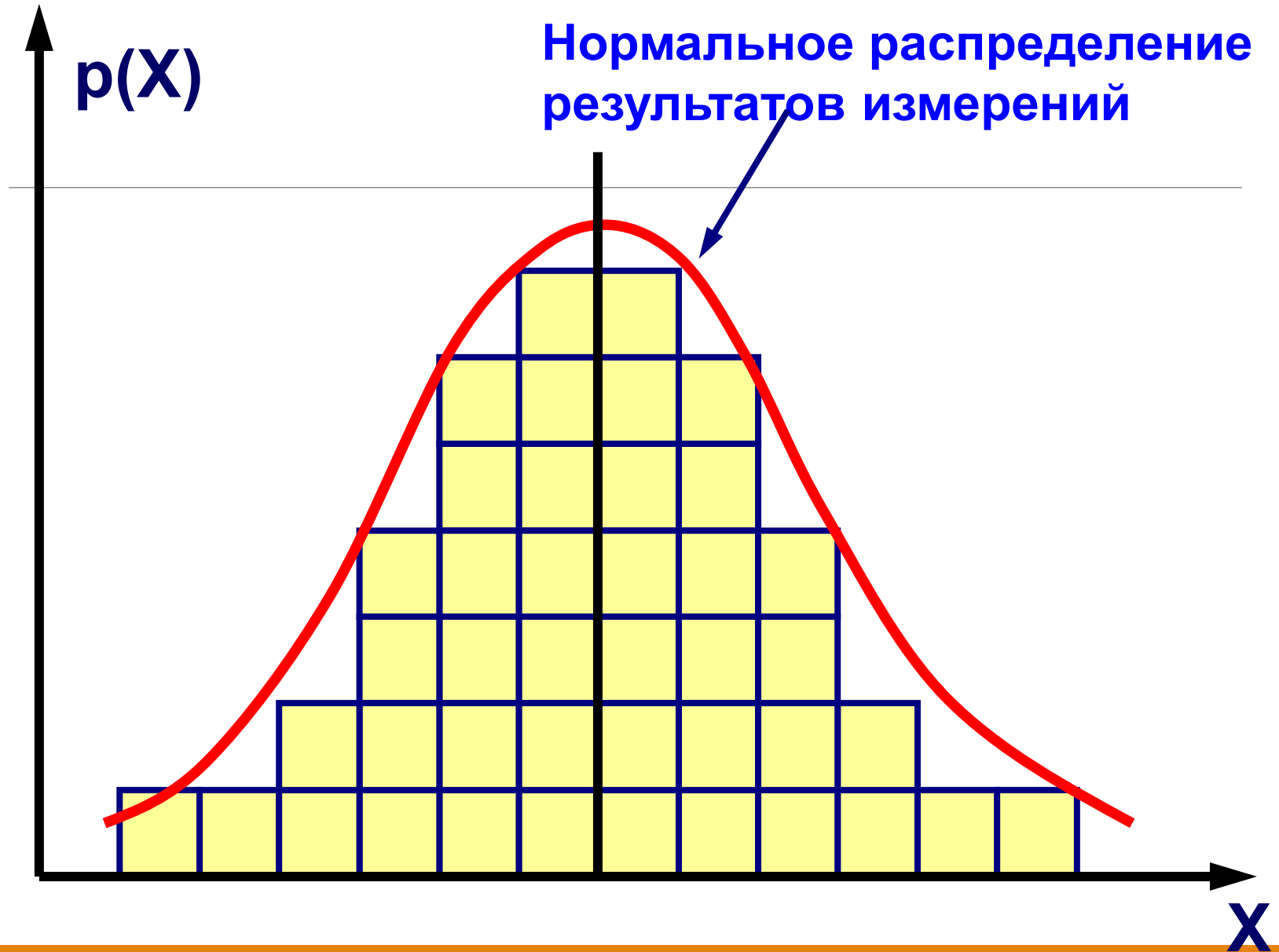


Случайные погрешности нельзя исключить полностью из результата измерений, но, их влияние может быть уменьшено путем увеличения числа наблюдений и обработки результатов измерений методами математической статистики.

**ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ** измеряемой величины в случае нормального закона имеет характерную колоколообразную форму



# Результаты повторных измерений



Функцию распределения  $p(x)$  также называют плотностью распределения вероятностей, она наиболее наглядно описывает свойства результатов измерений и случайных погрешностей.

---

Вероятность попадания случайной величины  $X$  в интервал  $(-\infty; +\infty)$  равна единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

# Параметры нормального распределения



Математическое ожидание

# Параметры нормального распределения

---

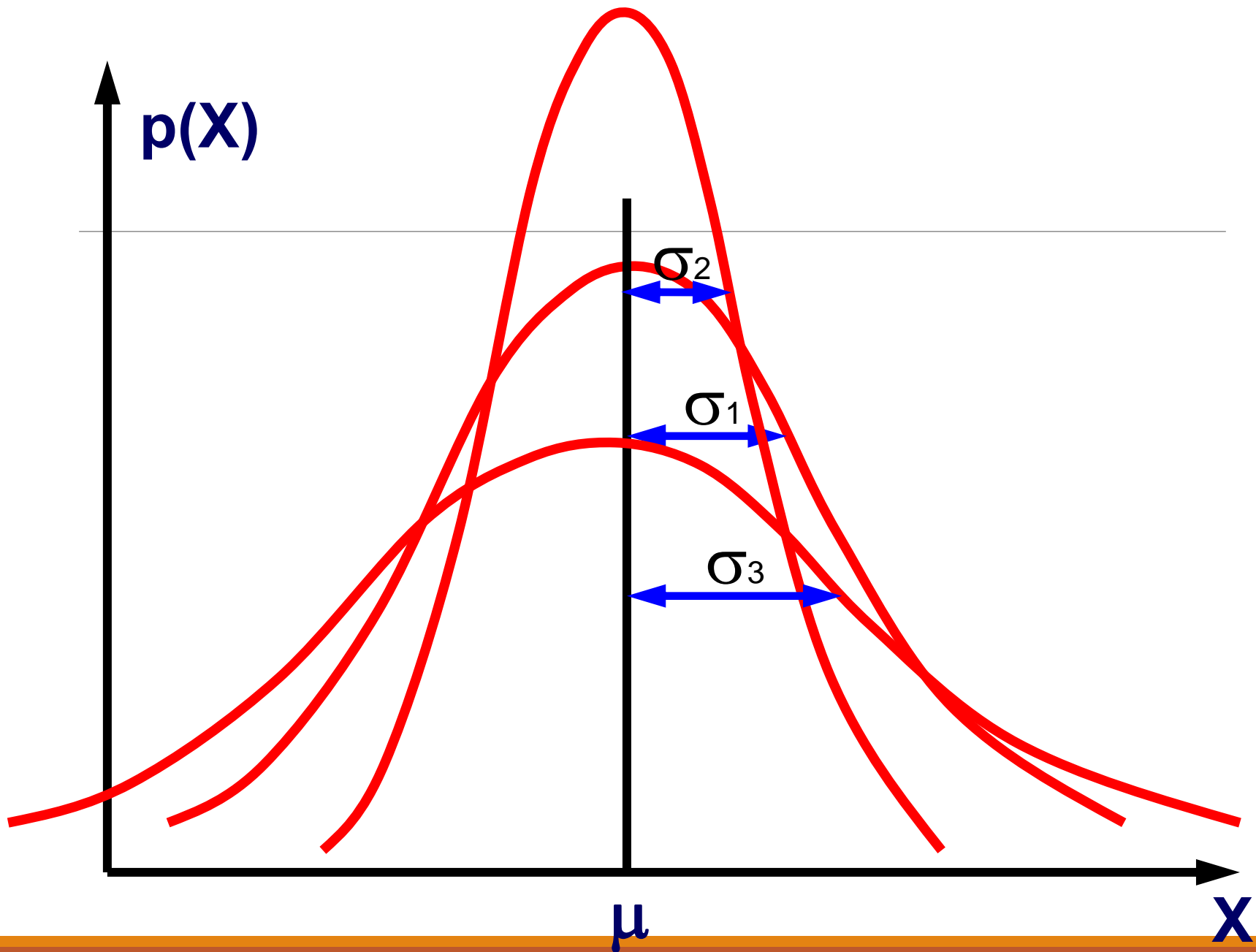
**СКО и математическое ожидание** – это основные параметры нормального распределения. Они определяют самые важные характеристики:

положение центра ( $m_x$ ),

степень рассеивания (разброса) результатов относительно центра ( $\sigma_x$ ).

**Математическое ожидание  $m_x$**  – это такая величина, слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайной величины одинаковы и равны 0,5. Около  $m_x$  колеблется среднее значение случайной величины. Приближенной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое значение измеряемой величины.

**СКО (среднеквадратичное отклонение)** – это характеристика рассеивания результатов измерения величины. СКО характеризует форму кривой распределения. Так как площадь под кривой распределения всегда равна единице, то при увеличении СКО кривая становится более плоской, вероятность появления больших погрешностей возрастает, т.е. увеличивается рассеивание результатов.





# Показатель качества измерений

---

СХОДИМОСТЬ – близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, выполненных повторно одними и теми же средствами измерений в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью

# Точечные оценки параметров нормального распределения

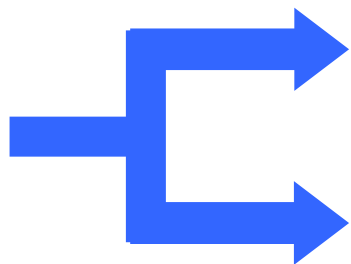
Математическое  
ожидание



Среднее  
арифметическое

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

СКО



Генеральное  
СКО ( $n \geq 20$ )

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

Выборочное  
СКО ( $n < 20$ )

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

СКО  
среднего

$$s(\bar{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

Задание: дать точечную оценку  
результатов измерения  
плотности породы (г/см<sup>3</sup>):

---

2,44

2,48

2,51

2,47

2,49

2,43

<b>№</b>	<b><math>X_i</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})^2</math></b>
<b>1</b>	<b>2,44</b>		
<b>2</b>	<b>2,48</b>		
<b>3</b>	<b>2,51</b>		
<b>4</b>	<b>2,47</b>		
<b>5</b>	<b>2,49</b>		
<b>6</b>	<b>2,43</b>		

$$\bar{X} = 2,470 \text{ г/см}^3$$

<b>№</b>	<b><math>X_i</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})^2</math></b>
<b>1</b>	<b>2,44</b>	<b>-0,03</b>	
<b>2</b>	<b>2,48</b>	<b>0,01</b>	
<b>3</b>	<b>2,51</b>	<b>0,04</b>	
<b>4</b>	<b>2,47</b>	<b>0</b>	
<b>5</b>	<b>2,49</b>	<b>0,02</b>	
<b>6</b>	<b>2,43</b>	<b>-0,04</b>	

$$\bar{X} = 2,470 \text{ г/см}^3$$

<b>№</b>	<b><math>X_i</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})^2</math></b>
<b>1</b>	<b>2,44</b>	<b>-0,03</b>	<b>0,0009</b>
<b>2</b>	<b>2,48</b>	<b>0,01</b>	<b>0,0001</b>
<b>3</b>	<b>2,51</b>	<b>0,04</b>	<b>0,0016</b>
<b>4</b>	<b>2,47</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>5</b>	<b>2,49</b>	<b>0,02</b>	<b>0,0004</b>
<b>6</b>	<b>2,43</b>	<b>-0,04</b>	<b>0,0016</b>

$$\bar{X} = 2,470 \text{ г/см}^3$$

$$\Sigma = 0,046 \text{ г/см}^3$$

<b>№</b>	<b><math>X_i</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})^2</math></b>
<b>1</b>	<b>2,44</b>	<b>-0,03</b>	<b>0,0009</b>
<b>2</b>	<b>2,48</b>	<b>0,01</b>	<b>0,0001</b>
<b>3</b>	<b>2,51</b>	<b>0,04</b>	<b>0,0016</b>
<b>4</b>	<b>2,47</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>5</b>	<b>2,49</b>	<b>0,02</b>	<b>0,0004</b>
<b>6</b>	<b>2,43</b>	<b>-0,04</b>	<b>0,0016</b>

$$\bar{X} = 2,470 \text{ г/см}^3$$

$$\Sigma = 0,046 \text{ г/см}^3$$

$$S = \sqrt{\frac{0,0046}{5}} = 0,0303 \text{ г/см}^3$$

<b>№</b>	<b><math>X_i</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})</math></b>	<b><math>(X_i - \bar{X})^2</math></b>
<b>1</b>	<b>2,44</b>	<b>-0,03</b>	<b>0,0009</b>
<b>2</b>	<b>2,48</b>	<b>0,01</b>	<b>0,0001</b>
<b>3</b>	<b>2,51</b>	<b>0,04</b>	<b>0,0016</b>
<b>4</b>	<b>2,47</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>5</b>	<b>2,49</b>	<b>0,02</b>	<b>0,0004</b>
<b>6</b>	<b>2,43</b>	<b>-0,04</b>	<b>0,0016</b>

$$\bar{X} = 2,470 \text{ г/см}^3$$

$$\Sigma = 0,046 \text{ г/см}^3$$

$$S = \sqrt{\frac{0,0046}{5}} = 0,0303 \text{ г/см}^3$$

$$S(\bar{X}) = \frac{0,0303}{\sqrt{6}} = 0,0124 \text{ г/см}^3$$

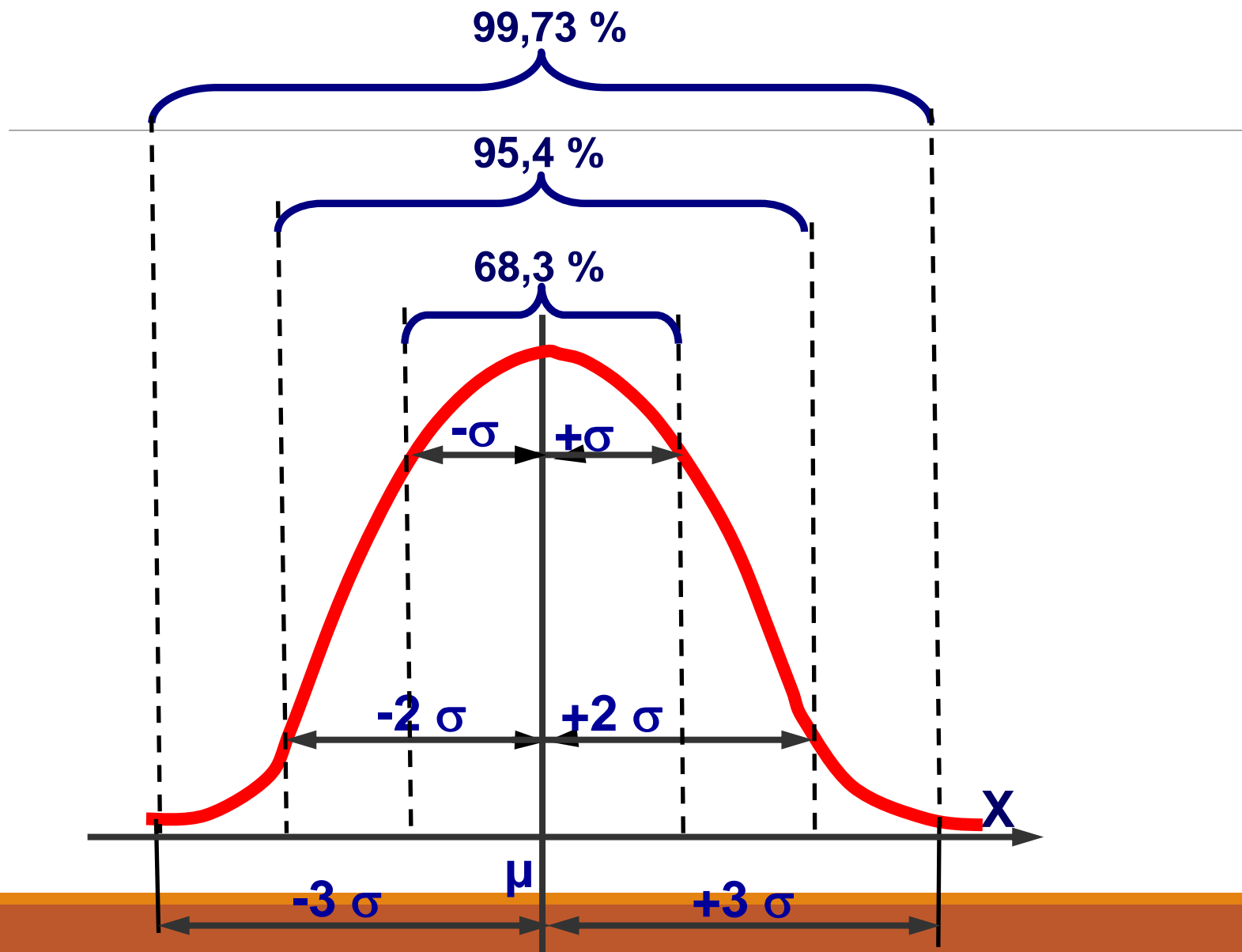


# Свойства нормального распределения

## Характерные интервалы:

- $\mu \pm \sigma$  - попадает 68,3 % значений
- $\mu \pm 2^*\sigma$  - попадает 95,4 % значений
- $\mu \pm 3^*\sigma$  - попадает 99,73 % значений

# Правило «трех сигм»



# Правило «трех сигм»

---

Если при повторных измерениях ( $n > 20$ ) величины постоянного размера сомнительный результат  $X_i$  (max или min) отличается от среднего более чем на  $3\sigma$ , то с вероятностью 99,73 % он ошибочен, его не учитывают при дальнейшей обработке

# Выявление промахов в результатах

При  $n \geq 20$   Правило «трех сигм»

если  $\frac{|\bar{X} - X_i|}{\sigma} \geq 3$  то  $X_i$  – промах

При  $n < 20$   Критерий Романовского ( $\beta_T$ )

если  $\frac{|\bar{X} - X_i|}{S} \geq \beta_T$  то  $X_i$  – промах

## Значения критерия Романовского $\beta_T$

<b>n</b>	<b><math>\beta_T</math></b>
<b>3</b>	<b>1,41</b>
<b>4</b>	<b>1,71</b>
<b>5</b>	<b>1,92</b>
<b>6</b>	<b>2,07</b>
<b>7</b>	<b>2,18</b>
<b>8</b>	<b>2,27</b>
<b>9</b>	<b>2,35</b>
<b>10</b>	<b>2,41</b>
<b>11</b>	<b>2,47</b>

<b>n</b>	<b><math>\beta_T</math></b>
<b>12</b>	<b>2,52</b>
<b>13</b>	<b>2,56</b>
<b>14</b>	<b>2,60</b>
<b>15</b>	<b>2,64</b>
<b>16</b>	<b>2,67</b>
<b>17</b>	<b>2,70</b>
<b>18</b>	<b>2,73</b>
<b>19</b>	<b>2,75</b>
<b>20</b>	<b>2,78</b>

# Задание

10-кратные измерения плотности породы дали следующие результаты:

$$\bar{X} = 3,52 \text{ г/см}^3$$

$$S = 0,28 \text{ г/см}^3$$

**Является ли промахом результат  $4,05 \text{ г/см}^3$**

# Интервальная оценка результата

●  $X_{\text{ИСТИННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{ИЗМЕРЕННОЕ}}$

---



# Интервальная оценка результата

●  $X_{\text{ИСТИННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{ИЗМЕРЕННОЕ}}$

---





# Интервальная оценка результата

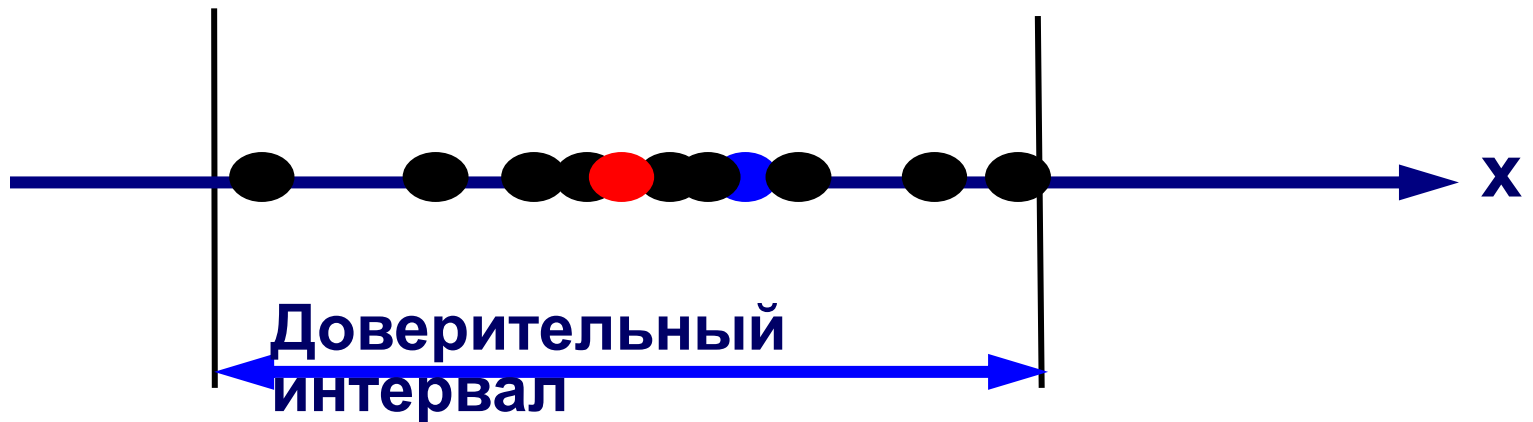
●  $X_{\text{ИСТИННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{ИЗМЕРЕННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{СРЕДНЕЕ}}$

---



# Интервальная оценка результата

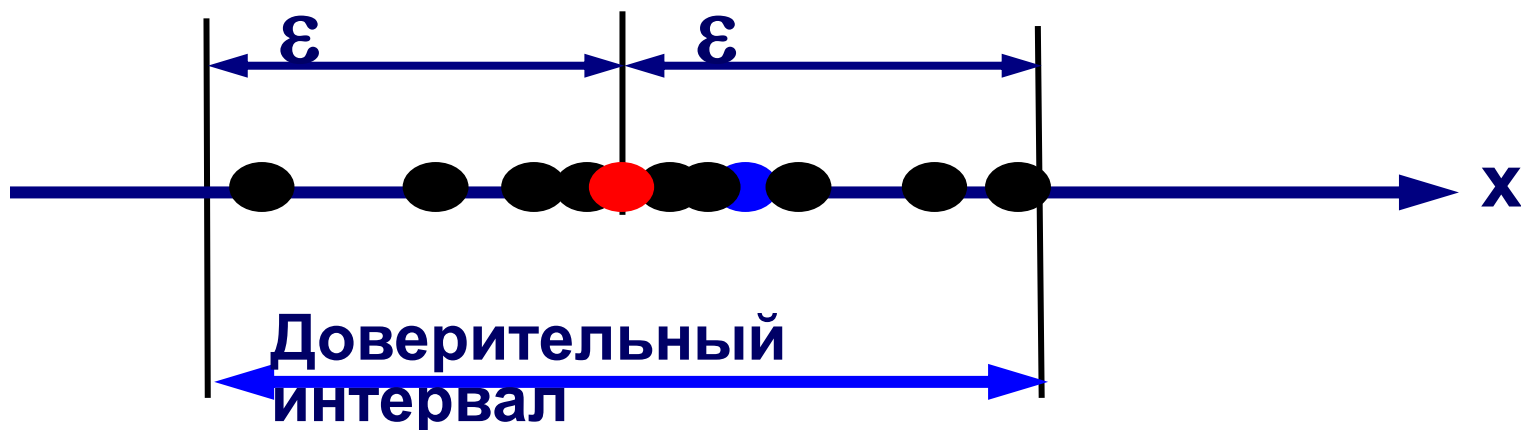
●  $X_{\text{ИСТИННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{ИЗМЕРЕННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{СРЕДНЕЕ}}$



Внутри доверительного интервала находится истинное значение измеряемой величины с заданной доверительной вероятностью

# Интервальная оценка результата

●  $X_{\text{ИСТИННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{ИЗМЕРЕННОЕ}}$       ● -  $X_{\text{СРЕДНЕЕ}}$



Внутри доверительного интервала находится истинное значение измеряемой величины с заданной доверительной вероятностью

**Граница доверительного интервала  $\varepsilon$ :**

$$\varepsilon = \frac{t_p \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 20)$$

$$\varepsilon = \frac{t_{p,f} \cdot S}{\sqrt{n}} \quad (n < 20)$$

# Значения квантили нормального распределения $t_p$

---

<b>P</b>	<b><math>t_p</math></b>
<b>0,683</b>	<b>1</b>
<b>0,954</b>	<b>2</b>
<b>0,9973</b>	<b>3</b>
<b>0,999</b>	<b>3,3</b>

# Значения коэффициента Стьюдента $t_{p,f}$

<b>n</b>	<b>Доверительная вероятность P</b>				
	<b>0,9</b>	<b>0,95</b>	<b>0,98</b>	<b>0,99</b>	<b>0,999</b>
<b>2</b>	<b>6,31</b>	<b>12,71</b>	<b>31,82</b>	<b>63,68</b>	<b>636,62</b>
<b>3</b>	<b>2,92</b>	<b>4,30</b>	<b>6,97</b>	<b>9,93</b>	<b>31,6</b>
<b>4</b>	<b>2,35</b>	<b>3,18</b>	<b>4,54</b>	<b>5,84</b>	<b>12,92</b>
<b>5</b>	<b>2,13</b>	<b>2,78</b>	<b>3,75</b>	<b>4,60</b>	<b>8,61</b>
<b>6</b>	<b>2,02</b>	<b>2,57</b>	<b>3,37</b>	<b>4,06</b>	<b>6,87</b>
<b>7</b>	<b>1,94</b>	<b>2,45</b>	<b>3,14</b>	<b>3,71</b>	<b>5,96</b>
<b>8</b>	<b>1,90</b>	<b>2,37</b>	<b>3,00</b>	<b>3,50</b>	<b>5,41</b>
<b>9</b>	<b>1,86</b>	<b>2,31</b>	<b>2,90</b>	<b>3,36</b>	<b>5,04</b>
<b>10</b>	<b>1,83</b>	<b>2,26</b>	<b>2,82</b>	<b>3,25</b>	<b>4,78</b>
<b>11</b>	<b>1,81</b>	<b>2,23</b>	<b>2,76</b>	<b>3,17</b>	<b>4,59</b>
<b>12</b>	<b>1,80</b>	<b>2,20</b>	<b>2,72</b>	<b>3,11</b>	<b>4,44</b>

# Задание

10-кратные измерения плотности породы дали следующие результаты:

---

$$\bar{X} = 3,52 \text{ г/см}^3$$

$$S = 0,28 \text{ г/см}^3$$

**Определите доверительный интервал с вероятностью  $P=0,95$ .**

# Задание

---

В результате многократных измерений ( $n=30$ ) термо-ЭДС определен доверительный интервал  $(16,73 \div 17,27)$  мВ с вероятностью  $P=0,997$  %.

Определите СКО измерения термо-ЭДС (закон распределения погрешности нормальный).