I. Конспекты лекций

1. Ось и отрезок оси. Координаты на прямой

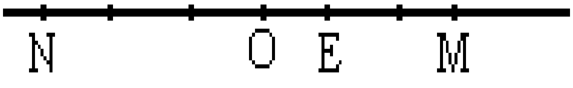
Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется осью. Отрезок оси, ограниченный какими-нибудь точками *A* и *B*, называется направленным, если сказано, какая из этих точек считается началом отрезка, какая – концом. Направленный отрезок с началом *A* и концом *B* обозначается символом $\overline{AB}$. Величиной направленного отрезка оси называется его длина, взятая со знаком плюс, если направление отрезка (т.е. направление от начала к концу) совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус, если это направление противоположно положительному направлению оси. Величина отрезка $\overline{AB}$ обозначается символом *AB*, его длина – символом |*AB*|. Если точки *A* и *B* совпадают, то определяемый ими отрезок называется нулевым; очевидно, в этом случае *AB*=*BA*=0 (направление нулевого отрезка следует считать неопределенным).

Пусть дана произвольная прямая *l*. Выберем на этой прямой две точки *O* и *E*, назначим на прямой *l* положительное направление совпадающее с направлением отрезка $\overline{OE}$ (после чего она становится осью). Назовем O – началом координат, *l* – осью координат, *OE* – единичным отрезком. Тем самым на прямой *l* ввели систему координат.

Координатой любой точки *M* прямой *l* (в установленной системе координат) называется число *x*, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $|\,OM\,| = |\,x\,|$;
2) *x* > 0, если точки *E* и *M* принадлежат одному лучу относительно т. *O*;
   x < 0, если точки *E* и *M* принадлежат различным лучам относительно т. *O*;
3) *x* = 0, если точка *M* совпадает с точкой *O*.

В дальнейшем символ *M*(*x*) означает, что точка *M* имеет координату *x*.



На рисунке: $M(3)$ и $N(-3)$.

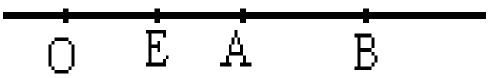
2. Длина отрезка. Деление отрезка в данном отношении

1. Пусть даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$ – произвольные точки прямой l. Найдем длину отрезка AB, измеренного единичным отрезком OE.

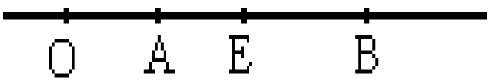
Рассмотрим все возможные случаи расположения точек на прямой:

I случай: $\overline{OE}$ и $\overline{AB}$ имеют общее направление.

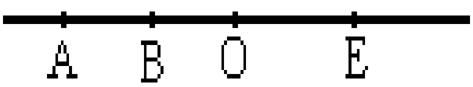
1) $|AB| = |OB| - |OA| = |x_2| - |x_1| = x_2 - x_1 > 0$;



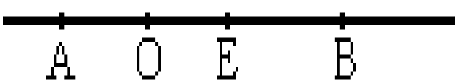
2) $|AB| = |OB| - |OA| = |x_2| - |x_1| = x_2 - x_1 > 0$;



3) $|AB| = |AO| - |BO| = |x_1| - |x_2| = -(x_1 - x_2) = x_2 - x_1 > 0$;

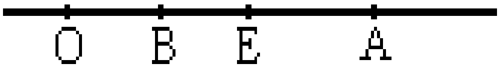


4) $|AB| = |AO| + |OB| = |x_1| + |x_2| = (-x_1) + x_2 = x_2 - x_1 > 0$.

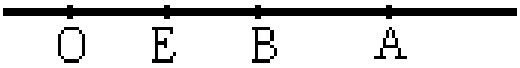


II случай: $\overline{OE}$ и $\overline{AB}$ имеют противоположные направления.

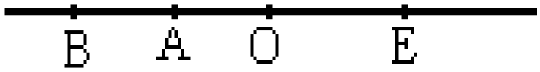
1) $|AB| = |OA| - |OB| = |x_1| - |x_2| = x_1 - x_2 > 0$;



2) $\mid AB \mid = \mid OA \mid - \mid OB \mid = x_1 - x_2 > 0$;

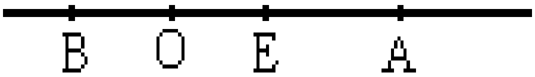


3)



$\mid AB \mid = \mid OB \mid - \mid OA \mid = \mid x_2 \mid - \mid x_1 \mid = (-x_2) - (-x_1) = x_1 - x_2 > 0$;

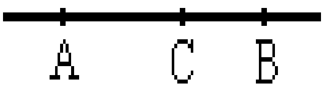
4) $\mid AB \mid = \mid OB \mid + \mid OA \mid = (-x_2) + x_1 = x_1 - x_2 > 0$.

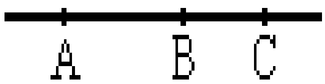


Таким образом, $d = |AB| = \mid x_2 - x_1 \mid$.

2. Рассмотрим деление отрезка *AB* точкой *C* в данном отношении.

$$\lambda = \frac{AC}{CB}$$





Разделить отрезок *AB* в данном отношении λ **-** это значит на прямой *AB* найти такую точку *C*(*x*), что:

1) $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \mid \lambda \mid$;

2) $C \in AB$, если $\lambda > 0$ (делит внутренним образом);

3) $C \notin AB$, если $\lambda < 0$ (делит внешним образом).

Пусть $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x)$. Тогда, $|AC| = |x - x_1|$, $|CB| = |x - x_2|$ и

1) если $C \in AB$, то знаки одинаковы;

2) если $C \notin AB$, то знаки противоположны.

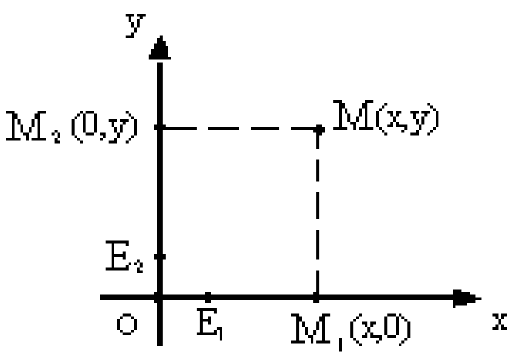
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \quad \Rightarrow \quad x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2 \quad \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1.$$

Если $\lambda = 1$, то C – середина отрезка AB и $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

3. Прямоугольная декартова система координат. Длина отрезка и деление отрезка в данном отношении

1. Прямоугольная декартова система координат на плоскости определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси – координатными осями. Первая из координатных осей называется осью абсцисс, а вторая осью ординат.

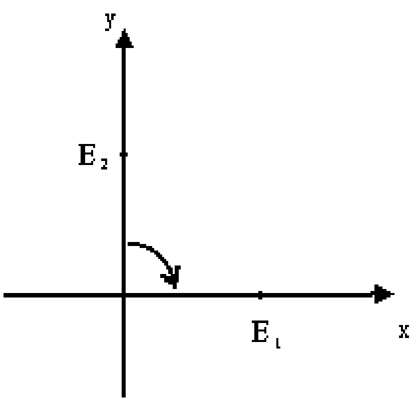


Начало координат обозначается буквой *O*, ось абсцисс – символом *Ox*, ось ординат – символом *Oy*.

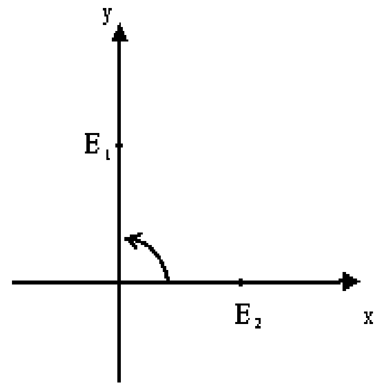
Координатами произвольной точки *M* в заданной системе называют числа $x=OM_1$, $y=OM_2$, где M_1 и M_2 суть проекции точки *M* на оси *Ox* и *Oy*, OM_1 обозначает величину отрезка $\overline{OM_1}$ оси абсцисс, OM_2 – величину отрезка $\overline{OM_2}$ оси ординат. Число *x* называется абсциссой точки *M*, число *y* – ординатой это же точки.

Ось *Oy* разделяет всю плоскость на две полуплоскости; та из них, которая расположена в положительном направлении оси *Ox*, называется правой, другая – левой. Точно так же ось *Ox* разделяет плоскость на две полуплоскости; та из них, которая расположена в положительном направлении оси *Oy*, называется верхней, другая нижней.

Обе координатные оси вместе разделяют плоскость на четыре четверти, которые нумеруют по следующему правилу: первой координатной четвертью называется та, которая лежит одновременно в правой и в верхней полуплоскости, второй – лежащая в левой и в верхней полуплоскости, третьей – лежащая в левой и в нижней

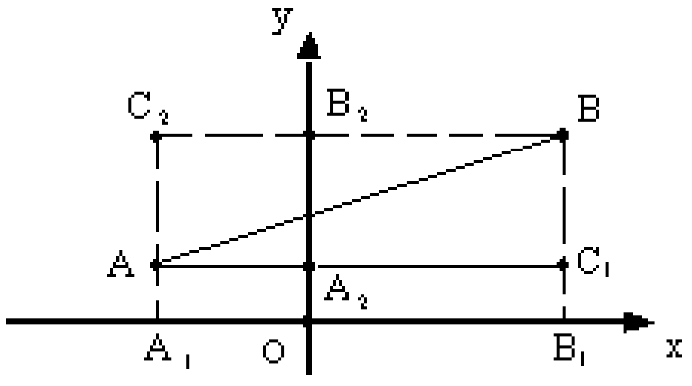


полуплоскости, четвертой – лежащая в правой и в нижней полуплоскости.



(-) ориентация (+) ориентация

2. Определим длину отрезка *AB*, где $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Пусть точки А, В расположены так, как показано на рисунке.



Рассмотрим ΔABC_1.

По теореме Пифагора:

$$|AB|^2 = |AC_1|^2 + |C_1B|^2,$$

но $|AC_1| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$

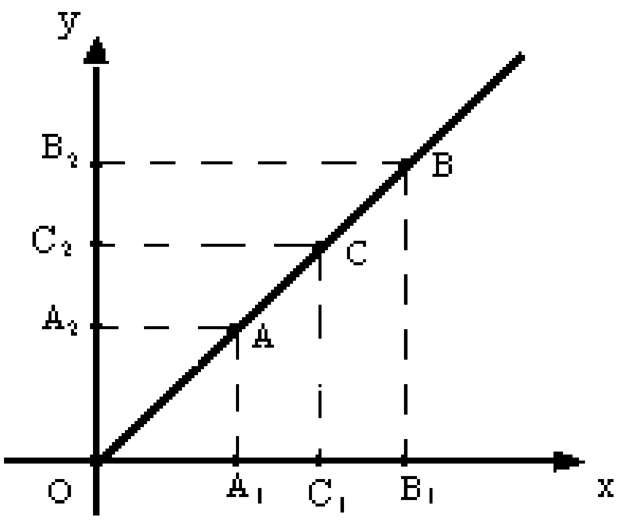
и $|C_1B| = |B_2A_2| = |y_2 - y_1|$,

то есть

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Длина отрезка равна корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат.

3. Пусть точки *A*, *B* и *C* лежат на одной прямой. Рассмотрим деление отрезка *AB* точкой *C* в данном отношении λ.



Пусть точка *C* лежит между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Тогда точка C_1 - между точками A_1 и B_1, а точка C_2 - между точками A_2 и B_2.

Определим координаты точек C_1 и C_2:

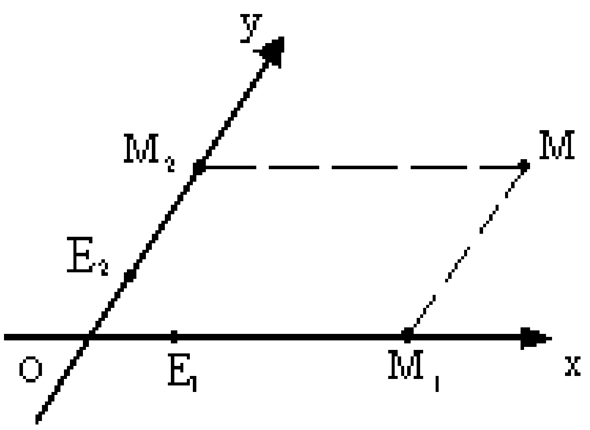
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Следовательно, координаты точки $C(x,y)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

4. Общая декартова система координат

Общей декартовой (или аффинной) системой координат на плоскости называется упорядоченная совокупность двух пересекающихся осей координат с общим началом координат O на каждой из них.



$M(x;y)$

$\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2.$

Координаты произвольной точки на плоскости определяем следующим образом: $x = \dfrac{OM_1}{OE_1}, \; y = \dfrac{OM_2}{OE_2}$