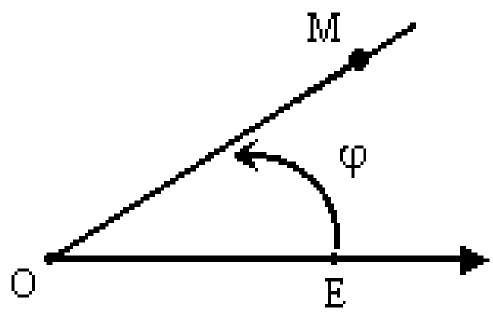
5. Полярная система координат на плоскости

Полярная система координат определяется заданием на плоскости некоторой точки *O*, называемой полюсом, исходящего из этой точки луча *OA*, называемого полярной осью, и масштаба для измерения длин. Кроме того, при задании полярной системы координат должно быть сказано, какие повороты вокруг точки *O* считаются положительными (на чертежах обычно положительными считаются повороты против часовой стрелки).



Полярными координатами произвольной точки *M* (относительно заданной системы) называются числа $\rho=OM$ и $\varphi=\angle AOM$. Угол φ при этом следует понимать так, как принято в тригонометрии. Число ρ называется первой координатой, или полярным радиусом, число φ – второй координатой, или полярным углом точки *M*.

Символ $M(\rho;\varphi)$ обозначает, что точка *M* имеет полярные координаты ρ и φ.

Полярный угол φ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину вида $\pm 2n\pi$, n – целое положительное число). Значение полярного угла, удовлетворяющее неравенствам $-\pi<\varphi\le+\pi$, называется главным.

6. Зависимость между координатами в полярной и прямоугольной декартовой системах координат.

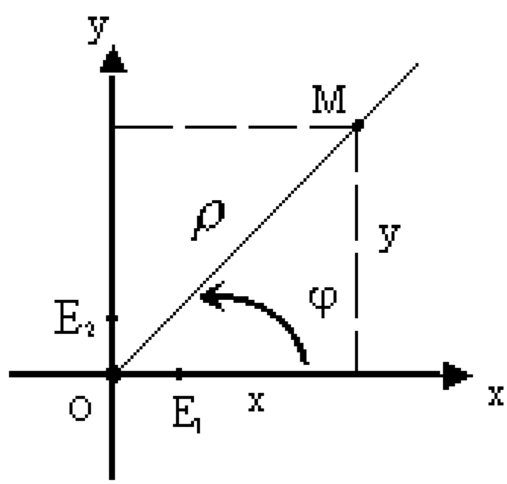
В случаях одновременного рассмотрения декартовой и полярной систем координат условимся:

1) пользоваться одним и тем же масштабом;
2) при определении полярных углов считать положительными повороты в том направлении, в каком следует вращать положительную полуось абсцисс, чтобы кратчайшим путем совместить ее с положительной

полуосью ординат (таким образом, если оси декартовой системы находятся в обычном расположении, т.е. ось *Ox* направлена вправо, а ось *Oy* – вверх, то и отсчет полярных углов должен быть обычным, т.е. положительным следует считать те углы, которые отсчитываются против часовой стрелки).

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат и полярную таким образом, чтобы полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс

Пусть $M(x;y)$ – точка в прямоугольной системе координат. Тогда из прямоугольного треугольника MOM_1 находим:



$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$ - формулы перехода из полярной системы координат в прямоугольную декартову.

В этом случае формулы

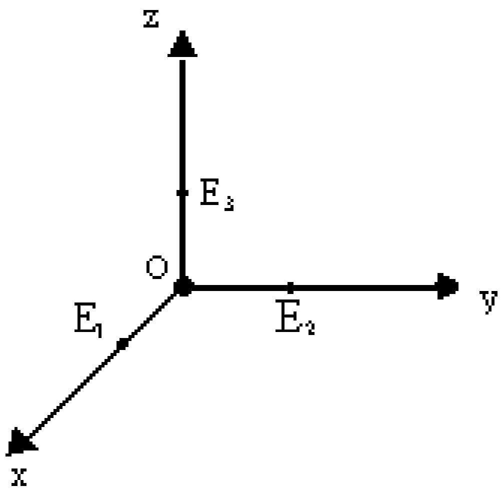
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

7. Прямоугольная декартова и общая декартова

системы координат в пространстве.

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-либо порядке.



Точка пресечения осей называется началом координат, а сами оси – координатными осями. Первая координатная ось называется осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью апликат.

Начало координат обозначается буквой *O*, координатные оси – соответственно – *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Пусть *M* – произвольная точка пространства, M_1, M_2, и M_3 – ее проекции на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Координатами точки *M* в заданной системе называются числа $x=OM_1$, $y=OM_2$, $z=OM_3$, где OM_1- величина отрезка $\overline{OM_1}$ оси абсцисс, OM_2 - величина отрезка $\overline{OM_2}$ оси ординат, OM_3 - величина отрезка $\overline{OM_3}$ оси апликат. Число *x* называется абсциссой, *y* – ординатой, *z*- апликатой точки *M*. Символ $M(x;y;z)$ обозначает, что точка *M* имеет координаты *x*, *y*, *z*.

Плоскость *Oyz* разделяет все пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси *Ox*, называется ближним, другое – дальним. Плоскость *Oxz* также разделяет пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси *Oy*, называется правым, другое – левым. Наконец, и плоскость *Oxy* разделяет пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси *Oz*, называется верхним, другое – нижним.

Три плоскости *Oxy*, *Oxz* и *Oyz* вместе разделяют пространство на восемь частей; их называют координатными октантами.

7.1. Расстояние *d* между двумя точками $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ в пространстве определяется формулой

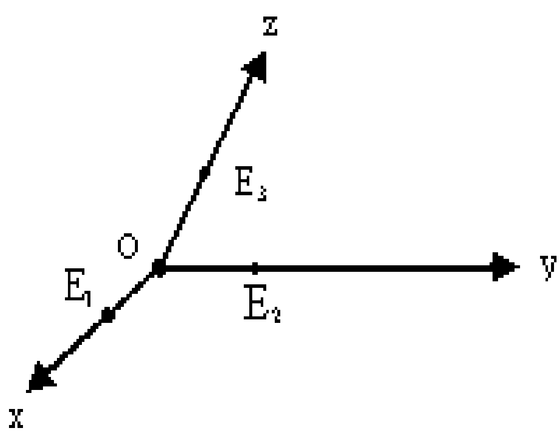
$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\ (y_2-y_1)^2+\ (z_2-z_1)^2}\ .$$

7.2. Координаты x, y, z точки C, которая делит отрезок $\overline{AB}$ ограниченный точками $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, в отношении λ, определяется формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

7.3. В частности, при λ = 1 имеем координаты середины данного отрезка: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

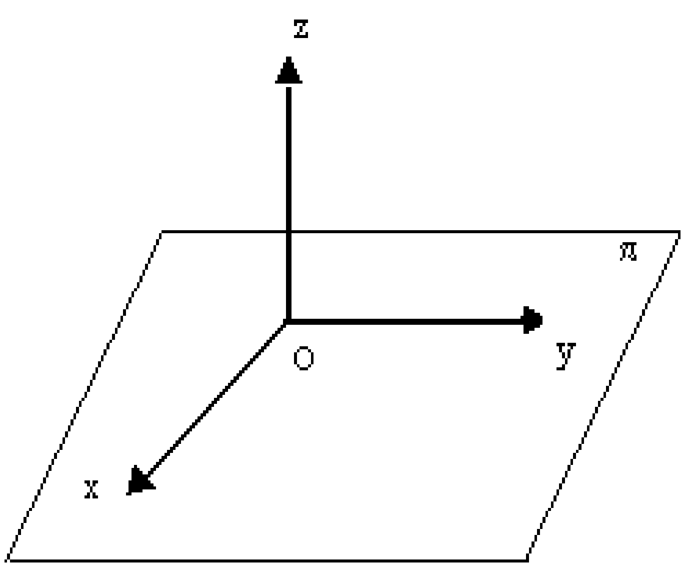
Общая декартова система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке осей, занумерованных в каком-либо порядке.



O – начало координат,
Ox - ось абсцисс,
Oy - ось ординат,
Oz - ось апликат.

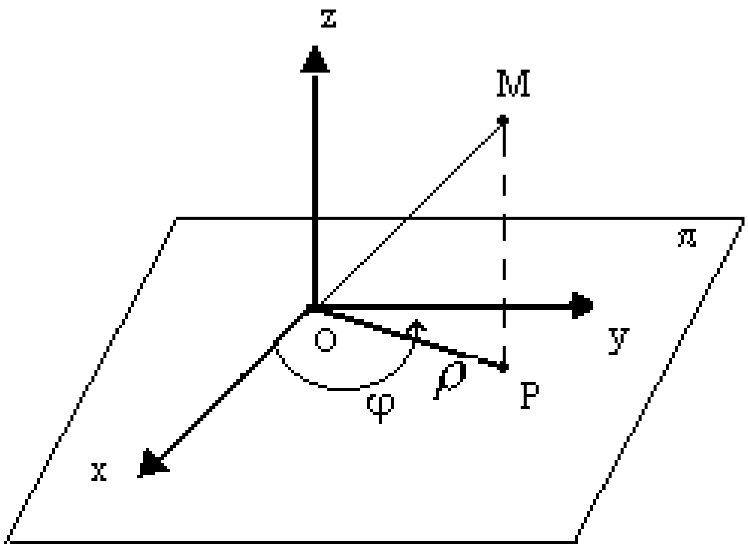
8. Полярная система координат в пространстве

Рассмотрим в пространстве ориентированную плоскость π. *Oz* - ось, перпендикулярная плоскости π, *Ox* - луч, лежащий в плоскости π.



Тогда, точка *O* называется полюсом, *Ox* – полярной осью, *Oz* - зенитной осью, π - экваториальной плоскостью.

Совокупность всех этих элементов называется полярной системой координат в пространстве.



Цилиндрическими координатами точки *M* называются числа ρ, φ, z, где ρ, φ - координаты точки *P* (проекция точки *M* на плоскость π), *z* – координата на зенитной оси. Обозначается М($\rho;\varphi;z$).

Рис.1.

Сферическими координатами точки *M* называются числа r, φ, θ, где r - длина $|OM|$, φ - угол (Ox, OP), θ - угол (OP, OM). Обозначается *M*($\rho;\varphi;\theta$).

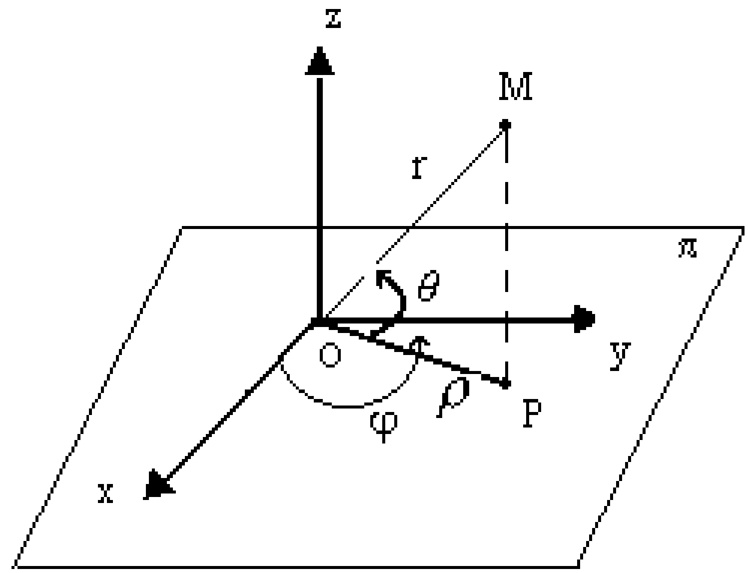


Рис.2.

9. Зависимость между полярной и прямоугольной декартовой системами координат в пространстве

Из рис. 2 следует, что $|OP| = \rho$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

С другой стороны, $\rho = r \cos \theta$, значит: $\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$.

$$
\begin{cases}
r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\sin\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{cases}
$$

II. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Как определяется положение точки на прямой при помощи координат?
2. Как вводится декартова система координат на плоскости (в пространстве)?
3. Как определяются координаты точки на плоскости (в пространстве) в прямоугольной декартовой системе координат?
4. Для любой ли тройки чисел (*x;y;z*) существует точка с этими координатами? Как её построить?
5. Укажите координаты проекций данной точки *A*(*x;y;z*) на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz* и на координатные плоскости *Oxy*, *Oyz*, *Oxz*.
6. Чему равно расстояние от начала координат до данной точки *A*(*x;y;z*)?
7. Чему равно расстояние между двумя точками с заданными координатами в декартовой системе координат?
8. Как определяются координаты точки *C*, делящей отрезок *AB* в отношении $\lambda \neq -1$?
9. Пусть $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$. Чему равны координаты середины отрезка *AB*?
10. Как вводится полярная система координат на плоскости?
11. Объясните, как построить точки на плоскости по полярным координатам.
12. Как определить декартовы координаты *x* и *y* точки *M*, если известны её полярные координаты ρ и φ?

13. Как определить полярные координаты ρ и φ точки *M*, если известны её декартовы координаты *x* и *y*?
14. Могут ли быть прямоугольные и полярные координаты точки представлены одной и той же парой чисел?
15. Чему равно расстояние между точками $M_1(\rho_1;\varphi_1)$, $M_2(\rho_2;\varphi_2)$ в полярной системе координат?
16. Как определяются сферические и цилиндрические координаты точки в пространстве?

III. Примеры решения задач

Пример 1. Найти декартовы координаты точки $A(3;\ \frac{\pi}{4})$, данной в полярной системе координат.

Решение. Применим формулы перехода от полярных координат к декартовым: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$ (1).

В данном случае ρ=3, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Подставляя в формулы (1), получаем:

$$x = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2},\ \ y = 3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $(\frac{3\sqrt{2}}{2};\ \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

Пример 2. Даны декартовы прямоугольные координаты точки: (-2; 2). Найти ее полярные координаты (считая, что полюс полярной системы совмещен с началом декартовой системы, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс).

Решение. Применим формулы перехода от декартовых прямоугольных координат к полярным:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (2).$$

Имеем: $\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $tg\varphi = \frac{2}{-2} = -1$. Согласно второму равенству $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ *или* $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$. Так как данная точка лежит во второй четверти, то из двух указанных значений φ мы должны в качестве главного выбрать первое.

Ответ : $(2\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi)$

Пример 3. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2, и находится вне отрезка, ограниченного точками M_1 и M_2.

Решение. Искомая точка делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = -\frac{1}{2}$. Применяя формулы $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ (3), находим координаты этой точки: $x = -5$, $y = -2$.

Ответ: (- 5; - 2).

Пример 4. Найти точку *C,* середину отрезка, ограниченного точками $A(4;\ -2)$ и $B(-6;\ 0)$.

Решение. В данном случае, т.к. *C* – середина *AB,* $\lambda = 1$. Формулы (3) принимают вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (4).$$

Подставляя значения в (4), находим координаты C: $x = -1$ и $y = -1$.

Ответ: *C* (-1; -1).

Пример 5. Даны вершины треугольника $A(5;\ -1)$, $B(-1;\ 7)$, $C(1;\ 2)$. Найти длину его внутренней биссектрисы, проведенной из вершины *A*.

Решение. Обозначим через *M* точку пересечения указанной биссектрисы со стороной *BC,* через *c* и *b* – длины сторон *AB* и *AC*. Как известно из элементарной геометрии, биссектриса, проведенная из какой–нибудь вершины треугольника, делит противолежащую этой вершине сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом, точка *M* делит отрезок *BC* в отношении λ, где λ = $\frac{BM}{MC}=\frac{c}{b}$. Пользуясь формулой $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, (5) находим длины сторон *AB* и *AC* : $c=\sqrt{(5+1)^2+(-1-7)^2}=10, \quad b=\sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2}=5.$

Следовательно, λ = 2. Применяя формулы (2), находим координаты точки *M* : $x=\frac{1}{3}, \; y=\frac{11}{3}$.

Снова пользуясь формулой (5), получаем искомую длину биссектрисы *AM*$=\frac{14}{3}\sqrt{2}.$

Ответ: *AM*$=\frac{14}{3}\sqrt{2}.$

IV. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $M_1(1;\frac{\pi}{4})$, $M_2(5;\frac{\pi}{2})$, $M_3(2;-\frac{\pi}{3})$, $M_4(4;\frac{5}{6}\pi)$ и $M_5(3;-2)$, заданным в полярной системе координат.
2. В полярной системе координат даны точки $M_1(12;\frac{4}{9}\pi)$ и $M_2(12;-\frac{2}{9}\pi)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки M_1 и M_2.
3. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P(6;-\frac{7}{12}\pi)$ и $Q(4;\frac{1}{6}\pi)$. Определить его площадь.
4. Доказать, что точки *A*(3;-5), *B*(-2;-7) и *C*(18;1) лежат на одной прямой.
5. Вершины треугольника суть точки *A*(5;0), *B*(0;1) и *C*(3;3). Вычислить его внутренние углы.
6. Через точку $M_1(1;-2)$ проведена окружность радиуса 5, касающаяся оси *Ox*. Определить центр *C* окружности.
7. Даны вершины треугольника $M_1(-3;6)$, $M_2(9;-10)$ и $M_3(-5;4)$. Определить центр *C* и радиус *R* описанной около этого треугольника окружности.

8. Даны три вершины параллелограмма $A(3;-5)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.
9. Даны три вершины $A(2;3)$, $B(4;-1)$ и $C(0;5)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D.
10. Даны вершины треугольника $A(3;-5)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.
11. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.
12. Найти точку пересечения медиан треугольника, зная координаты его вершин: (1;4), (-5;0) и (-2;-1).
13. Отрезок между точками $A(3;2)$ и $B(15;6)$ разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.
14. Найти точку равноудаленную от трех данных точек: $A(2;2)$, $B(-5;1)$ и $C(3;-5)$.

V. Индивидуальные задания
Уровень I

Вариант 1

1. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(3;3)$, $B(a;b)$ относительно: а) начала координат; б) оси Ox; в) биссектрисы первого координатного угла.
2. Найти координаты проекций на оси абсцисс и ординат точек $C(2;-3)$ и $D(-6;-2)$.
3. В полярной системе координат даны точки $A(8;-2п/3)$ и $B(6;п/3)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
4. В полярной системе координат даны точки $C(5;п/4)$ и $D(8;-п/12)$. Вычислите расстояние d между ними.
5. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $M_1(12;-п/12)$ и $M_2(3;п/15)$. Определить его площадь.
6. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат даны точки $M_1(6;п/2)$ и $M_2(12; -п/6)$. Определить декартовы координаты этих точек.
7. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью

абсцисс. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки $P(0; 5)$ и $Q(1;-\sqrt{3})$. Определить координаты этих точек.

8. Даны точки $M_1(1;-2)$ и $M_2(2;1)$ Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
9. Даны проекции $X=5$ и $У=-4$ отрезка M_1M_2 на координатные оси; зная, что его начало в точке $M_1(-2; 3)$, найти координаты его конца.
10. Определить расстояние между двумя точками $A(5; 2)$ и $B(1; -1)$.
11. Даны две смежные вершины квадрата $A(3;-7)$ и $B(-1; 4)$. Вычислить его площадь.
12. Даны концы $A(3;-5)$ и $B(-1;1)$ однородного стержня. Определить координаты его центра масс.
13. Даны вершины треугольника: $A(3;-7)$, $B(5;2)$, $C(-1;0)$. Найти середины его сторон.
14. Отрезок между точками $A(3;2)$ и $B(15;6)$ разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.
15. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: $A(2;3)$, $B(3;2)$ и $C(-2;5)$.

Вариант 2

1. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(2;-4)$, $B(-2;1)$ относительно: а) начала координат; б) оси Ox; в) биссектрисы первого координатного угла.
2. Найти координаты проекций на оси абсцисс и ординат точек $C(3;-1)$ и $D(-1;1)$.
3. В полярной системе координат даны точки $A(12;4п/9)$ и $B(12;-2п/9)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
4. В полярной системе координат даны точки $C(2;п/12)$ и $D(1;5п/12)$. Вычислите расстояние d между ними.
5. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P(6;-7п/12)$ и $Q(4;п/6)$. Определить его площадь.
6. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат даны точки $M_1(5;0)$ и $M_2(8;2п/3)$. Определить декартовы координаты этих точек.
7. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью

абсцисс. В декартовой системе координат даны точки $P(-3;0)$ и $Q(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$. Определить полярные координаты этих точек.

8. Даны точки $M_1(5;0)$ и $M_2(-1;4)$ Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
9. Даны проекции $X=4$ и $У=-5$ отрезка AB на координатные оси; зная, что его конец в точке $B(1;-3)$, найти координаты его начала.
10. Определить расстояние между двумя точками $A(-6;3)$ и $B(0;-5)$.
11. Даны две противоположные вершины квадрата $P(3;5)$ и $Q(1;-3)$. Вычислить его площадь.
12. Центр масс однородного стержня находится в точке $M(1;4)$, один его концов находится в точке $P(-2;2)$. Определить координаты точки Q – другого конца этого стрежня.
13. Даны вершины треугольника: $A(1;-3)$, $B(3;-5)$, $C(-5;7)$. Определить середины его сторон.
14. Отрезок, ограниченный точками $A(1;-3)$ и $B(4;3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
15. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: $M_1(-3;2)$, $M_2(5;-2)$ и $M_3(1;3)$.

Вариант 3

1. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(5;-3)$, $B(-5;-4)$ относительно: а) начала координат; б) оси Ox; в) биссектрисы первого координатного угла.
2. Найти координаты проекций на оси абсцисс и ординат точек $N(3;-7)$ и $M(-6;4)$.
3. В полярной системе координат даны точки $A(3;п/6)$ и $B(4;-2п/3)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
4. В полярной системе координат даны точки $C(4;п/5)$ и $D(6;6п/5)$. Вычислите расстояние d между ними.
5. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $M_1(12;-п/12)$ и $M_2(3;п/15)$. Определить его площадь.
6. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат даны точки $M_1(2;п/4)$ и $M_2(10;-п/3)$. Определить декартовы координаты этих точек.

7. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки $P(\sqrt{3};1)$ и $Q(3;-4)$. Определить координаты этих точек.
8. Даны точки $M_1(0;-3)$ и $M_2(5;6)$ Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
9. Даны проекции $X=5$ и $У=-4$ отрезка M_1M_2 на координатные оси; зная, что его начало в точке $M_1(-2;3)$, найти координаты его конца.
10. Определить расстояние между двумя точками $A(0;0)$ и $B(-3;4)$.
11. Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$, две его противоположные вершины суть точки $P(4;9)$ и $Q(-2;1)$. Вычислить площадь этого ромба.
12. Даны точки $A(3;-1)$ и $B(2;1)$. Определить координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B.
13. Точки $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ и $P(-2;2)$ являются серединами сторон треугольника. Определите его вершины.
14. Даны точки $A(1;-1)$, $B(3;3)$ и $C(4;5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.
15. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: $M(3;-4)$, $N(-2;3)$ и $P(4;5)$.

Вариант 4

1. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(5;6)$, $B(-1;-3)$ относительно: а) начала координат; б) оси Oy; в) биссектрисы второго координатного угла.
2. Найти координаты проекций на оси абсцисс и ординат точек $C(3;-2)$ и $D(-5;-1)$.
3. В полярной системе координат даны точки $A(15;п/4)$ и $B(15;3п/4)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
4. В полярной системе координат даны точки $C(3;11п/18)$ и $D(4;п/9)$. Вычислите расстояние d между ними.
5. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P(6;-7п/12)$ и $Q(4;п/6)$. Определить его площадь.
6. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью

абсцисс. В полярной системе координат даны точки M_1(2;п/3) и M_2(3;-п/6). Определить декартовы координаты этих точек.

7. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки *P*(-1;1) и *Q*(0;2). Определить координаты этих точек.
8. Даны точки M_1(-4;5) и M_2(1;3) Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
9. Даны проекции *X*=4 и *У*=-5 отрезка *AB* на координатные оси; зная, что его конец в точке *B*(1;-3), найти координаты его начала.
10. Определить расстояние между двумя точками *A*(9;-7) и *B*(4;5).
11. Сторона ромба равна $5\sqrt{2}$, две его противоположные вершины суть точки *P*(3;-4) и *Q*(1;2). Вычислить длину высоты этого ромба.
12. Даны точки *A*(3;-1) и *B*(2;1). Определить координаты точки *N*, симметричной точке *B* относительно точки *A*.
13. Найти вершины треугольника, зная середины его сторон *P*(3;2), *Q*(-1;6) и *R*(-4;2).
14. Определить координаты концов *A* и *B* отрезка, который точками *P*(2;2) и *Q*(1;5) разделен на три равные части.
15. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: *A*(3;6), *B*(-1;3) и *C*(2;-1).

Вариант 5

1. Найти координаты точек, симметричных точкам *A*(c;d), *B*(-5;2) относительно: а) начала координат; б) оси *Oy*; в) биссектрисы второго координатного угла.
2. Найти координаты проекций на оси абсцисс и ординат точек *C*(5;-1) и *D*(3;-2).
3. В полярной системе координат даны точки *A*(9;-2п/3) и *B*(12;п/3). Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки *A* и *B*.
4. В полярной системе координат даны точки *C*(1;п/3) и *D*(2;-п/6). Вычислите расстояние *d* между ними.
5. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата M_1(12;-п/12) и M_2(3;п/15). Определить его площадь.
6. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью

абсцисс. В полярной системе координат даны точки $M_1(\sqrt{2};3п/4)$ и $M_2(5;п/2)$. Определить декартовы координаты этих точек.

7. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки $P(0;5)$ и $Q(1;-\sqrt{3})$. Определить полярные координаты этих точек.
8. Даны точки $M_1(-2;-1)$ и $M_2(-5;0)$ Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
9. Даны проекции X=5 и $У$=-4 отрезка M_1M_2 на координатные оси; зная, что его начало в точке $M_1(-2; 3)$, найти координаты его конца.
10. Определить расстояние между двумя точками $A(3;-4)$ и $B(-3;4)$.
11. Проверив, что точки $A(-2;8)$, $B(1;5)$ и $C(4;1)$ могут служить тремя вершинами ромба, вычислить площадь этого ромба.
12. Центр тяжести прямого однородного стержня находится в точке $M(5;1)$, один из его концов совпадает с точкой А(-1; -3). Определить координаты другого конца.
13. Даны вершины треугольника: $A(3;-7)$, $B(5;2)$, $C(-1;0)$. Найти середины его сторон.
14. Отрезок между точками $A(3;2)$ и $B(15;6)$ разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.
15. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: $A(-2;1)$, $B(2;-2)$ и $C(8;6)$.

Вариант 6

1. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(-1;5)$, $B(4;-3)$ относительно: а) начала координат; б) оси Oy; в) биссектрисы второго координатного угла.
2. Найти координаты проекций на оси абсцисс и ординат точек $C(2;3)$ и $D(-5;0)$.
3. В полярной системе координат даны точки $A(11;п/6)$ и $B(11;-2п/3)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
4. В полярной системе координат даны точки $C(4;-5п/6)$ и $D(3;2п/3)$. Вычислите расстояние d между ними.
5. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P(6;-7п/12)$ и $Q(4;п/6)$. Определить его площадь.

6. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат даны точки M_1(6;п/2) и M_2(12;-п/6). Определить декартовы координаты этих точек.
7. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В декартовой системе координат даны точки *P*(-3;0) и *Q*($-\sqrt{2}$;$-\sqrt{2}$). Определить полярные координаты этих точек.
8. Даны точки M_1(2;4) и M_2(-1;-5) Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
9. Даны проекции *X*=4 и *У*=-5 отрезка *AB* на координатные оси; зная, что его конец в точке *B*(1;-3), найти координаты его начала.
10. Определить расстояние между двумя точками *A*(-2;2) и *B*(1;-3).
11. Даны точки *A*(1;3), *B*(4;7), *C*(2;8) и *D*(-1;4). Проверив, что четырехугольник *ABCD* – параллелограмм, вычислить его высоту, приняв сторону *AB* за основание.
12. Даны концы *A*(3;-5) и *B*(-1;1) однородного стержня. Определить координаты его центра масс.
13. Даны вершины треугольника: *A*(1;-3), *B*(3;-5), *C*(-5;7). Определить середины его сторон.
14. Отрезок ограниченный точками *A*(1;-3) и *B*(4;3), разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
15. Вычислить площадь пятиугольника, вершинами которого служат точки *A*(-2;0), *B*(0;-1), *C*(2;0), *D*(3;2), *E*(-1;3).

Уровень II

Вариант 1

1. В полярной системе координат даны точки *A*(8;-2п/3) и *B*(6;п/3). Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки *A* и *B*.
2. В полярной системе координат даны точки *C*(5;п/4) и *D*(8;-п/12). Вычислите расстояние *d* между ними.
3. Даны точки M_1(1;-2) и M_2(2;1) Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.

4. Даны проекции X=5 и $У$=-4 отрезка M_1M_2 на координатные оси; зная, что его начало в точке M_1(-2;3), найти координаты его конца.
5. Даны вершины треугольника: A(3;-7), B(5;2), C(-1;0). Найти середины его сторон.
6. Отрезок между точками A(3;2) и B(15;6) разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.
7. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: A(2;3), B(3;2) и C(-2;5).
8. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат M_1(3;п/4) и M_2(3;-2).
9. В полярной системе координат даны две вершины правильного треугольника A(4;-п/12) и B(8;7п/12). Определить его площадь.
10. Вычислить проекции на координатные оси отреза, зная длину d=12 и полярный угол θ=2п/3.
11. Длина отрезка MN равна 13; его начало в точке M(3;-2), проекция на ось абсцисс равна –12. Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат острый угол.
12. Даны три вершины A(3;-7), B(5;-7), C(-2;5) параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B. Определить длины диагоналей этого параллелограмма.
13. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки A(0;5), B(2;1), C(-1;7).
14. Доказать, что треугольник с вершинами A_1(1;1), A_2(2;3), A_3(5;-1) прямоугольный.
15. На оси абсцисс найти такую точку M, расстояние от которой до точки N(2;-3) равнялось бы *5*.

Вариант 2

1. В полярной системе координат даны точки A(12;4п/9) и B(12;-2п/9). Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
2. В полярной системе координат даны точки C(2;п/12) и D(1;5п/12). Вычислите расстояние d между ними.
3. Даны точки M_1(5;0) и M_2(-1;4) Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
4. Даны проекции X=4 и $У$=-5 отрезка AB на координатные оси; зная, что его конец в точке B(1;-3), найти координаты его начала.

5. Даны вершины треугольника: $A(1;-3)$, $B(3;-5)$, $C(-5;7)$. Определить середины его сторон.
6. Отрезок ограниченный точками $A(1;-3)$ и $B(4;3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
7. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: $M_1(-3;2)$, $M_2(5;-2)$ и $M_3(1;3)$.
8. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат $M_1(2;-п/2)$ и $M_2(4;5п/6)$.
9. Одна из вершин треугольника *OAB* находится в полюсе *O*, две другие суть точки $A(5;п/4)$ и $B(4;п/12)$. Вычислить площадь этого треугольника.
10. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину $d=6$ и полярный угол $\theta=-п/6$.
11. Длина отрезка *MN* равна 13; его начало в точке $M(3;-2)$, проекция на ось абсцисс равна –12. Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат тупой угол.
12. Доказать, что точки $A(2;2)$, $B(-1;6)$, $C(-5;3)$ и $D(-2;-1)$ являются вершинами квадрата.
13. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $A(3;1)$, $B(-2;-9)$, $C(8;11)$.
14. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $M_1(1;1)$, $M_2(0;2)$, $M_3(2;-1)$ тупой угол.
15. На оси ординат найти такую точку *M*, расстояние от которой до точки $N(-8;13)$ равнялось бы *17*.

Вариант 3

1. В полярной системе координат даны точки $A(3;п/6)$ и $B(4;-2п/3)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки *A* и *B*.
2. В полярной системе координат даны точки $C(4;п/5)$ и $D(6;6п/5)$. Вычислите расстояние *d* между ними.
3. Даны точки $M_1(0;-3)$ и $M_2(5;6)$ Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
4. Даны проекции $X=5$ и $У=-4$ отрезка M_1M_2 на координатные оси; зная, что его начало в точке $M_1(-2;3)$, найти координаты его конца.
5. Точки $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ и $P(-2;2)$ являются серединами сторон треугольника. Определите его вершины.

6. Даны точки $A(1;-1)$, $B(3;3)$ и $C(4;5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.
7. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: $M(3;-4)$, $N(-2;3)$ и $P(4;5)$.
8. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат $M_1(3;-п/3)$ и $M_2(4;22/7)$.
9. Вычислить площадь треугольника, вершины которого $A(3;п/8)$, $B(8;7п/24)$, $C(6;5п/8)$ заданы в полярных координатах.
10. Вычислить проекции на координатные оси отреза, зная длину $d=2$ и полярный угол $\theta=-п/4$.
11. Длина d отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат острый угол.
12. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3;0)$ и $C(-4;1)$. Найти две другие его вершины.
13. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $A(0;2)$, $B(-1;5)$, $C(3;4)$.
14. Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами $M(-1;3)$, $N(1;2)$ и $P(0;4)$ острые.
15. Определить ординату точки M, зная, что абсцисса ее равна 7, а расстояние от точки $N(-1;5)$ равно 10.

Вариант 4

1. В полярной системе координат даны точки $A(15;п/4)$ и $B(15;3п/4)$. Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
2. В полярной системе координат даны точки $C(3;11п/18)$ и $D(4;п/9)$. Вычислите расстояние d между ними.
3. Даны точки $M_1(-4;5)$ и $M_2(1;3)$ Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
4. Даны проекции $X=4$ и $У=-5$ отрезка AB на координатные оси; зная, что его конец в точке $B(1;-3)$, найти координаты его начала.
5. Найти вершины треугольника, зная середины его сторон $P(3;-2)$, $Q(1;6)$ и $R(-4;2)$.
6. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.

7. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: A(3; 6), B(-1; 3) и C(2; -1).
8. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат M_1(2;п) и M_2(1;2).
9. Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты (4;п/4) и (1;5п/18).
10. Вычислить проекции на координатные оси отрезков, зная длину d=12 и полярный угол θ=2п/3.
11. Длина d отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат тупой угол.
12. Даны две смежные вершины квадрата A(2;-1) и B(-1;3). Определить две его другие вершины.
13. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки A(3;-5), B(-2;-7), C(18;1).
14. Вершины треугольника суть точки A(5;0), B(0;1) и C(3;3). Вычислить его внутренние углы.
15. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки A(4;-6) на расстоянии 5 единиц.

Вариант 5

1. В полярной системе координат даны точки A(9;-2п/3) и B(12;п/3). Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.
2. В полярной системе координат даны точки C(6;п/4) и D(1;3п/4). Вычислите расстояние d между ними.
3. Даны точки M_1(-2;-1) и M_2(-5;0). Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
4. Даны проекции X=5 и $У$=-4 отрезка M_1M_2 на координатные оси; зная, что его начало в точке M_1(-2;3), найти координаты его конца.
5. Даны вершины треугольника: A(3;-7), B(5;2), C(-1;0). Найти середины его сторон.
6. Отрезок между точками A(3;2) и B(15;6) разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.

7. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки *A*(-2;1), *B*(2;-2) и *C*(8;6).
8. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат M_1(3;-п/4) и M_2(5;-1).
9. Вычислить площадь треугольника, заданного своими координатами в полярной системе координат *A*(9;п/10); *B*(12;4п/15); *C*(10;3п/5).
10. Вычислить проекции на координатные оси отрезков, зная длину *d*=6 и полярный угол *θ*=-п/6.
11. Длина отрезка *MN* равна 17; его конец - в точке *N*(-7;3), проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс острый угол.
12. Зная две противолежащие вершины ромба *A*(8;-3) и *C*(10;11) и длину его стороны |*AB*|=10, определить координаты остальных вершин ромба.
13. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки *A*(0;5), *B*(2;1), *C*(-1;7).
14. Вершины треугольника суть точки *A*($-\sqrt{3}$;1), *B*(0;2) и *C*($-2\sqrt{3}$;2). Вычислить его внешний угол при вершине *A*.
15. На биссектрисах координатных углов найти точки, расстояние которых от точки *M*(-2;0) равно 10.

Вариант 6

1. В полярной системе координат даны точки *A*(11;п/6) и *B*(11;-2п/3). Вычислите полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки *A* и *B*.
2. В полярной системе координат даны точки *C*(4;-п/12) и *D*(7;-7п/12). Вычислите расстояние *d* между ними.
3. Даны точки M_1(2;4) и M_2(-1;-5). Найти проекции на координатные оси отрезка M_1M_2.
4. Даны проекции *X*=4 и *У*=-5 отрезка *AB* на координатные оси; зная, что его конец в точке *B*(1;-3), найти координаты его начала.
5. Даны вершины треугольника: *A*(1;-3), *B*(3;-5), *C*(-5;7). Определить середины его сторон.
6. Отрезок, ограниченный точками *A*(1;-3) и *B*(4;3), разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
7. Вычислить площадь пятиугольника, вершинами которого служат точки *A*(-2;0), *B*(0;-1), *C*(2;0), *D*(3;2), *E*(-1;3).

8. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат $M_1(3;п/2)$ и $M_2(5;2)$.
9. Одна из вершин треугольника *OAB* находится в полюсе, две другие суть точки $A(\rho_1;\theta_1)$ и $B(\rho_2;\theta_2)$. Вычислите площадь этого треугольника.
10. Вычислить проекции на координатные оси отрезков, зная длину d=6 и полярный угол θ=-п/6.
11. Длина отрезка *MN* равна 17; его конец - в точке *N*(-7;3), проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс тупой угол.
12. Даны три вершины *A*(3;-7), *B*(5;-7), *C*(-2;5) параллелограмма *ABCD*, четвертая вершина которого *D* противоположна *B*. Определить длины диагоналей этого параллелограмма.
13. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки *A*(3;1), *B*(-2;-9), *C*(8;11).
14. Доказать, что треугольник с вершинами *A*(0;0), *B*(3;1) и *C*(1;7) - прямоугольный.
15. Даны две точки *M*(2;2) и *N*(5;-2). На оси абсцисс найти такую точку *P*, чтобы угол *MNP* был прямым.

Уровень III

Вариант 1

1. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат $M_1(3;п/4)$ и $M_2(3;-2)$.
2. В полярной системе координат даны две вершины правильного треугольника *A*(4;-п/12) и *B*(8;7п/12). Определить его площадь.
3. Вычислить проекцию отрезка на ось u, если даны его длина d=6 и угол наклона к оси φ=п/3.
4. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину d=12 и полярный угол θ=2п/3.
5. Длина отрезка *MN* равна 13; его начало - в точке *M*(3;-2), проекция на ось абсцисс равна –12. Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат острый угол.

6. Даны три вершины $A(3;-7)$, $B(5;-7)$, $C(-2;5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B. Определить длины диагоналей этого параллелограмма.
7. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $A(0;5)$, $B(2;1)$, $C(-1;7)$.
8. Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(1;1)$, $A_2(2;3)$, $A_3(5;-1)$ - прямоугольный.
9. На оси абсцисс найти такую точку M, расстояние от которой до точки $N(2;-3)$ равнялось бы 5.
10. Через точку $A(4;2)$ проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр C и радиус R.
11. Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма $A(-4,5;-7)$ и $B(2;6)$ и точка пересечения диагоналей $M(3;1,5)$. Вычислить координаты двух остальных его вершин.
12. Даны три вершины треугольника $A(1;4)$, $B(3;-9)$ и $C(-5;2)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины B.
13. Площадь треугольника $S=3$, две его вершины суть точки $A(3;1)$ и $B(1;-3)$, а третья вершина C лежит на оси Oy. Определить координаты вершины C.

Вариант 2

1. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат $M_1(2;-п/2)$ и $M_2(4;5п/6)$.
2. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе O, две другие суть точки $A(5;п/4)$ и $B(4;п/12)$. Вычислите площадь этого треугольника.
3. Вычислить проекцию отрезка на ось u, если даны его длина $d=6$ и угол наклона к оси $φ=2п/3$.
4. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину $d=6$ и полярный угол $\theta=-п/6$.
5. Длина отрезка MN равна 13; его начало - в точке $M(3;-2)$, проекция на ось абсцисс равна –12. Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат тупой угол.
6. Доказать, что точки $A(2;2)$, $B(-1;6)$, $C(-5;3)$ и $D(-2;-1)$ являются вершинами квадрата.
7. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $A(3;1)$, $B(-2;-9)$, $C(8;11)$.

8. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $M_1(1;1)$, $M_2(0;2)$, $M_3(2;-1)$ тупой угол.
9. На оси ординат найти такую точку M, расстояние от которой до точки $N(-8;13)$ равнялось бы 17.
10. Через точку $M(1;-2)$ проведена окружность радиуса 5, касающаяся оси Ox. Определить центр C окружности.
11. Даны три вершины параллелограмма: $A(4;2)$, $B(5;7)$ и $C(-3;4)$. Найти четвертую вершину D, противоположную B.
12. Даны три вершины треугольника $A(3;-5)$, $B(-3;3)$ и $C(-1;-2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.
13. Площадь треугольника $S=4$, две его вершины суть точки $A(2;1)$ и $B(3;-2)$, а третья вершина C лежит на оси Ox. Определить координаты вершины C.

Вариант 3

1. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат $M_1(3;-п/3)$ и $M_2(4;22/7)$.
2. Вычислить площадь треугольника, вершины которого $A(3;п/8)$, $B(8;7п/24)$, $C(6;5п/8)$ заданы в полярных координатах.
3. Вычислить проекцию отрезка на ось u, если даны его длина $d=7$ и угол наклона к оси $\varphi=п/2$.
4. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину $d=2$ и полярный угол $\theta=-п/4$.
5. Длина d отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат острый угол.
6. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3;0)$ и $C(-4;1)$. Найти две другие его вершины.
7. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $A(0;2)$, $B(-1;5)$, $C(3;4)$.
8. Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами $M(-1;3)$, $N(1;2)$ и $P(0;4)$ острые.
9. Определить ординату точки M, зная, что абсцисса ее равна 7, а расстояние от точки $N(-1;5)$ равно 10.
10. Даны вершины треугольника $M_1(-3;6)$, $M_2(9;-10)$ и $M_3(-5;4)$. Определите центр C и радиус R окружности, описанной около этого треугольника.

11. Даны три вершины параллелограмма: $A(3;-5)$, $B(5;-3)$ и $C(-1;3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.
12. Даны три вершины треугольника $A(3;-5)$, $B(1;-3)$ и $C(2;-2)$. Определить длину биссектрисы его внешнего угла при вершине B.
13. Площадь треугольника $S=3$, две его вершины суть точки $A(3;1)$ и $B(1;-3)$, центр масс этого треугольника лежит на оси Ox. Определить координаты вершины C.

Вариант 4

1. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат $M_1(2;\pi)$ и $M_2(1;2)$.
2. Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $(4;\pi/4)$ и $(1;5\pi/18)$
3. Вычислить проекцию отрезка на ось u, если даны его длина $d=5$ и угол наклона к оси $\varphi=0$.
4. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину $d=12$ и полярный угол $\theta=2\pi/3$.
5. Длина d отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат тупой угол.
6. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;-1)$ и $B(-1;3)$. Определить две его другие вершины.
7. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $A(3;-5)$, $B(-2;-7)$, $C(18;1)$.
8. Вершины треугольника суть точки $A(5;0)$, $B(0;1)$ и $C(3;3)$. Вычислить его внутренние углы.
9. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(4;-6)$ на расстоянии 5 единиц.
10. Найти центр окружности, проходящей через точку $A(-4;2)$ и касающейся оси абсцисс в точке $B(2;0)$.
11. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3;5)$, $B(1;7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1;1)$. Определить две другие вершины.
12. Даны три вершины треугольника $A(2;-5)$, $B(1;-2)$ и $C(4;7)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

13. Площадь параллелограмма S=12, две его вершины суть точки A(-1;3) и B(-2;4). Найти две другие вершины этого параллелограмма при условии, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси абсцисс.

Вариант 5

1. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат M_1(3;-п/4) и M_2(5;-1).
2. Вычислить площадь треугольника, заданного своими точками в полярных координатах: A(9;п/10); B(12;4п/15); C(10;3п/5).
3. Вычислить проекцию отрезка на ось u, если даны его длина d=5 и угол наклона к оси φ=п.
4. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину d=6 и полярный угол θ=-п/6.
5. Длина отрезка MN равна 17; его конец - в точке N(-7;3), проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс острый угол.
6. Зная две противолежащие вершины ромба A(8;-3) и C(10;11) и длину его стороны $|AB|$=10, определить координаты остальных вершин ромба.
7. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки A(0;5), B(2;1), C(-1;7).
8. Вершины треугольника суть точки $A(-\sqrt{3};1)$, B(0;2) и $C(-2\sqrt{3};2)$. Вычислить его внешний угол при вершине A.
9. На биссектрисах координатных углов найти точки, расстояние которых от точки M(-2;0) равно 10.
10. Найти центр окружности, проходящей через точку A(2;-1) и касающейся обеих осей координат.
11. Даны три вершины A(2;3), B(4;-1) и C(0;5) параллелограмма $ABCD$. Найти четвертую вершину D.
12. Даны три вершины треугольника A(-1;-1), B(3;5) и C(-4;1). Найти точку пересечения биссектрисы его внешнего угла при вершине A с продолжением стороны BC.
13. Площадь параллелограмма S=17, две его вершины суть точки A(2;1) и B(5;-3). Найти две другие вершины этого параллелограмма при условии, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси ординат.

Вариант 6

1. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси и полюса точкам, заданным в полярной системе координат M_1(3;п/2) и M_2(5;2).
2. Одна из вершин треугольника *OAB* находится в полюсе, две другие суть точки $A(\rho_1;\theta_1)$ и $B(\rho_2;\theta_2)$. Вычислить площадь этого треугольника.
3. Вычислить проекцию отрезка на ось *u*, если даны его длина *d*=4 и угол наклона к оси φ= - п/3.
4. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину *d*=2 и полярный угол θ=-п/4.
5. Длина отрезка *MN* равна 17; его конец в точке *N*(-7;3), проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс тупой угол.
6. Даны три вершины *A*(3;-7), *B*(5;-7), *C*(-2;5) параллелограмма *ABCD*, четвертая вершина которого *D* противоположна *B*. Определить длины диагоналей этого параллелограмма.
7. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки *A*(3;1), *B*(-2;-9), *C*(8;11).
8. Доказать, что треугольник с вершинами *A*(0;0), *B*(3;1) и *C*(1;7) - прямоугольный.
9. Даны две точки *M*(2;2) и *N*(5;-2). На оси абсцисс найти такую точку *P*, чтобы угол *MNP* был прямым.
10. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек: *A*(2;2), *B*(-5;1), *C*(3;-5).
11. Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма *A*(-4,5;-7) и *B*(2;6) и точка пересечения диагоналей *M*(3;1,5). Вычислить координаты двух остальных его вершин.
12. Вычислить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин *A*(3;-2), *B*(5;2) и *C*(-1;4).
13. Площадь треугольника *S*=3, две его вершины суть точки *A*(3;1) и *B*(1;-3), а третья вершина *C* лежит на оси *Oy*. Определить координаты вершины *C*.

VI. Исторические сведения

Идея координатного метода уходит корнями в глубь античной истории. Элементы идеи координат были отмечены у древних египтян. При выполнении строительных работ они пользовались параллельными координатами (отрезками). Греческие астрономы Гиппарх (II в. до н. э.) и Птолемей (II в. н. э.) пользовались сферическими координатами (широта и долгота) для определения положения различных точек земной поверхности. В XIV веке французский математик Н. Орсел ввел по аналогии с географическими - координаты на плоскости. Он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и назвать широтой и долготой то, что теперь мы называем абсциссой и ординатой. Однако отсутствие буквенной символики и общего представления о числе тормозило развитие координатного метода. Наибольший вклад в создание метода координат внесли французские ученые Р. Декарт и П. Ферма. Пользуясь буквенной символикой, введенной французским ученым Ф. Виетом, они одновременно и независимо друг от друга дали науке новый метод – метод координат. Трудно переоценить значение этого метода в развитии математики и ее приложений. Огромное количество задач, требовавших для решения специфических методов, получило решение, состоящее в аккуратном проведении алгебраических вычислений.

При переходе на алгебраический язык многие трудные геометрические задачи становятся очень простыми.

Пьер Ферма (1601-1665) происходил из семьи торговца. Окончил в университете юридический факультет. Работал советником в парламенте г. Тулузы с 1631г. до конца жизни. Математикой занимался в свободное время. Ферма был знатоком классических сочинений древних и современной ему математики. Он не писал книг, а сообщал о своих достижениях в личном общении, в письмах, поэтому большинство работ было опубликовано лишь после его смерти. Идеи аналитической геометрии сосредоточены в небольшом сочинении «Введение в теорию плоских и пространственных мест». Это сочинение не оказало на математику столь значительного влияния, как Декартова «Геометрия», напечатанная в 1637 году. «Введение…» было напечатано очень поздно, лишь в 1679 году (хотя было известно с 1636 г.), и было изложено тяжеловесным, затруднительным для понимания языком. Ферма понимал, что находится только в самом начале исследований новой математической дисциплины. Он писал: «Действительно, для науки представляет некоторый интерес не утаивать от последующих поколений еще не оформившиеся плоды разума; и благодаря новым открытиям науки первоначально грубые и простые идеи как укрепляются, так и множатся. И в интересах самих изучающих - составить себе полное представление как о сокращенных путях разума, так и о самопроизвольно развивающемся искусстве». (Введение в изучение плоских и телесных мест // Декарт Р. Геометрия. М.; Л., 1938).

Рене Декарт (1596-1650) был выдающимся французским ученым: философом, физиком, математиком, физиологом. Дворянин по происхождению, он оставил светскую жизнь ради занятий наукой. Он стремился и в философии, и в любой другой науке найти математические законы, хотел создать такой универсальный математический метод, который позволял бы решать любую задачу. Главное достижение Декарта – построение координатной геометрии. Большой заслугой Декарта по сравнению с Ферма было введение в математику переменной величины, создание более удачной символики, установление тесной связи пространства с числом. Взаимопроникновение методов алгебры и геометрии с помощью метода координат представляло в математике явление революционное. Стало возможным бурное развитие всей высшей математики и связанных с ней разделов естествознания. Декарт начал с того, что перевел на алгебраический язык задачи на построение циркулем и линейкой. Он обнаружил, что конические сечения (эллипс, гипербола, парабола) – то же самое, что кривые второго порядка. Правда, у него в точном виде еще не было того, что сегодня называется декартовой системой координат. Координатные оси еще неравноправны; проводится только одна ось, а другая координата восстанавливается по мере необходимости. Поведение кривой он изучал только в первом квадранте. На пространство свой метод Декарт не распространил и ограничился изучением только плоских кривых.

Факты аналитической геометрии накапливались вначале медленно. Прошло около столетия, пока средствами аналитической геометрии удалось получить результаты, которые превзошли достижения древних. Подлинно новый шаг в развитии аналитической геометрии был сделан только в начале XVIII века. В 1704 году вышло в свет сочинение Ньютона «Перечисление кривых третьего порядка». Он раскрыл новые возможности метода координат и значительно его усовершенствовал. Ньютон ввел равноправные оси координат, определил знаки функций во всех четырех квадрантах, создал основы исследования свойств кривых по свойствам выражающих уравнений.

Систематическое использование пространственных координат было начато **А. Клеро** (1713-1765) в 1731 году. Аналитическая геометрия первой половине XVIII века формировалась в тесном сплетении с геометрическими приложениями математического анализа. Она уже играла роль фундамента большой области математических знаний, несмотря на независимость, как по форме, так и по содержанию.

Облик, близкий современному, придал аналитической геометрии **Л. Эйлер** (1707-1783), посвятив этому второй том «Введение в анализ» (1748 г.). Благодаря работам Эйлера, аналитическая геометрия на плоскости превратилась в отдельную науку. Он использовал прямоугольные и косоугольные координаты, разъяснил способ записи уравнений кривых, рассмотрел вопрос о преобразовании систем координат, классифицировал кривые по степеням их уравнений и выявлению общих свойств, рассмотрел пересечения кривых, составил уравнения сложных кривых. Для исследования кривых он применял, кроме декартовых, и полярные координаты. Эйлер не ограничился двумерными задачами. Он изучал конусы, цилиндры, поверхности вращения с помощью метода сечений произвольными плоскостями.

Вторая половина XVIII века принесла только частичные усовершенствования в основном уже сформировавшейся аналитической геометрии. Ее начали вводить в программу высших учебных заведений. Этот предмет является составной частью классической основы математического и технического образования.

Название – аналитическая геометрия – впервые ввел французский математик, академик **С.Ф. Лакруа** (1776-1848) в конце XVIII века.

VII. Примеры диктантов

7.1. Диктант по теории

1. Напишите формулу вычисления координат точки, делящей отрезок пополам в ПДСК на плоскости.
2. Напишите формулу вычисления координат точки, делящей отрезок в отношении λ в ПДСК в пространстве.
3. Напишите формулу вычисления расстояния между двумя точками в ПДСК в пространстве.
4. Напишите формулу вычисления площади треугольника в ПДСК на плоскости.
5. Напишите алгоритм вычисления площади многоугольника в ПДСК на плоскости.
6. Напишите формулу перехода от ПДСК на плоскости к полярной системе координат на плоскости.
7. Как вводится на плоскости полярная система координат.

8. Напишите зависимость между координатами в полярной и прямоугольной декартовой системах координат на плоскости.
9. Что представляет собой сферическая система координат, как определяются координаты точек в ней?

7.2. Диктант по практике

1. Определить расстояние между двумя точками $A(5;2)$ и $B(1;-1)$.
2. Дан треугольник ABC с вершинами в точках с координатами $A(-7;3)$, $B(5;-2)$, $C(1;1)$. Вычислить периметр этого треугольника.
3. Дан треугольник ABC с вершинами в точках с координатами $A(1;5)$, $B(2;-3)$, $C(4;2)$. Вычислить координаты середин сторон данного треугольника.
4. Даны точки $A(2;3)$ и $B(6;7)$. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $\lambda=3$.
5. Отрезок EF с концами в точках с координатами $E(5;-2)$ и $F(3;8)$ разделен на 7 равных частей. Вычислить координаты точки G – второй в направлении от точки E к F.
6. Вычислить площадь четырехугольника $ABCD$, если его вершины заданы координатами $A(-3;-5)$, $B(3;6)$, $C(4;-3)$, $D(-5;8)$.
7. Вычислить площадь пятиугольника с вершинами в точках $K(1;1)$, $L(8;2)$, $M(6;5)$, $N(2;4)$, $Q(4;-1)$.
8. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В декартовой прямоугольной системе координат дана точка $P(-1;1)$. Определить полярные координаты этой точки.
9. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось - с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат дана точка $M(12;-\pi/6)$. Определить декартовы координаты этой точки.

VIII. Список литературы

1. **Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.** Геометрия. – М.: Наука, 1990.
2. **Александров П.С.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979.
3. **Александров П.С.** Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.
4. **Анатасян Л.С., Гуревич Г.Б.** Геометрия – М.: Просвещение, 1976.- Ч.2.
5. **Базылев В.Т., Дуничев К.И.** Геометрия - М.: Просвещение, 1975.-Ч.2.
6. **Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.** Геометрия - М.: Просвещение, 1974.- Ч.1.
7. **Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П.** Аналитическая геометрия. – М.: Просвещение, 1974.
8. **Жафяров А.Ж.** Геометрия – Новосибирск: Сиб.унив.изд-во, 2002.- Ч.1.
9. **Жафяров А.Ж., Никитина Е.С.** и др. Геометрия: Электронный учебник. Ч.1.– Якутск: www.sitc.ru, 2000. – 3,63 Мб.
10. **Клетеник Д.В.** Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 2000.
11. **Моденов П.С.** Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1990.
12. **Моденов П.С., Пархоменко А.С.** Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976.
13. **Пархоменко А.С.** Аналитическая геометрия. Методические указания. - М.: Изд-во МГУ, 1979.
14. **Погорелов А.В.** Геометрия. – М.: Наука, 1990.
15. **Цубербиллер О.Н.** Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964.
16. **Щербаков Р.Н., Малаховский В.С.** Краткий курс аналитической геометрии. – Томск: Изд-во ТГУ, 1964.

Содержание

Никитина Екатерина Семеновна
Лукинова Айталина Егоровна
Федотова Милана Егоровна

Системы координат

Редактор
Компьютерная верстка

Лицензия ЛР №020059 от 24.03.97
Подписано к печати 17.03.2003. Формат бумаги 64x84/16.
Печать RISO. Уч.-изд. л. 3,18. Усл. печ. л. 2,28. Тираж 150 экз.
Заказ №
Педуниверситет, г. Новосибирск, 126, ул.Вилюйская, 28