Что такое определитель?

Определитель (или детерминант) — одно из основных понятий линейной алгебры. Определитель матрицы является многочленом от элементов квадратной матрицы (то есть такой, у которой количество строк и столбцов равны). В общем случае матрица может быть определена над любым коммутативным кольцом, в этом случае определитель будет элементом того же кольца.

Определитель матрицы 3x3

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = ?$$

Определитель матрицы 3x3

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 - \cdots$$

Определитель матрицы 3x3

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7$$

Определитель матрицы 3х3

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & \color{red}{3} \\ \color{red}{4} & 5 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{pmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + \color{red}{3\cdot 4\cdot 8}$$

Определитель матрицы 3x3

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \color{red}{3} \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ \color{red}{7} & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - \color{red}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Определитель матрицы 3x3

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9$$

Определитель матрицы 3x3

$$\det\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \color{red}{6} \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{pmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-\color{red}{1\cdot6\cdot8}$$

Определитель матрицы 3x3

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-1\cdot6\cdot8 =$$

$$45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48$$

Определитель матрицы 3x3

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1{\cdot}5{\cdot}9+2{\cdot}6{\cdot}7+3{\cdot}4{\cdot}8-3{\cdot}5{\cdot}7-2{\cdot}4{\cdot}9-1{\cdot}6{\cdot}8 =$$
$$45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$$

Определитель матрицы 4х4

Определитель матрицы 4х4 имеет много(?) элементов, решая которые можно легко совершить арифметическую ошибку. Поэтому используем метод Лапласа.

Теорема (Лаплас): Любую матрицу...блаблабла

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} =$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} \color{red}{+} & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \color{red}{+}$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +\color{red}{1}\cdot$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & \color{red}{-} & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \color{red}{-}$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{2} & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - \color{red}{2} \cdot$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 2 \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & \color{red}{+} & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 2 \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} \color{red}{+}$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & {\color{red}3} & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 2 \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} + {\color{red}3} \cdot$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 2 \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 2 \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix} -$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & {\color{red}4} \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 2 \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix} - {\color{red}4}\cdot$$

Определитель матрицы 4x4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} -$$

$$2 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix} - 4 \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Лапласить можно по любому столбцу или по любой строке. Чтобы было проще считать, надо попытаться вывести побольше нулей. Воспольуемся свойствами определителей.

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Свойство 1:

Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} \color{red}{2} & \color{red}{3} & \color{red}{7} \\ 4 & 6 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку на -2 и запомним её в уме:

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку на -2 и запомним её в уме: $(2\cdot(-2) 3\cdot(-2) 7\cdot(-2))$

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку на -2 и запомним её в уме: $(-4 - 6 - 14)$

Свойства определителей

Свойство 1:

Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ \color{red}{4} & \color{red}{6} & \color{red}{-1} \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку на два и запомним её в уме: $(-4-6-14)$

Теперь к второй строке прибавим то, что получилось

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4+(-4) & 6+(-6) & -1+(-14) \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку на два и запомним её в уме: $(-4\ -6\ -14)$

Теперь к второй строке прибавим то, что получилось

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-15} \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Получили такой вот определитель. Теперь мы легко можем посчитать её, используя метод Лапласа по второй строке

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -15 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -(-15)\cdot$$

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -15 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -(-15)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -15 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -(-15)\cdot\ (2\cdot 3 - 13\cdot 3)$$

Свойства определителей

Свойство 1:
Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) можно прибавить другую строку(столбец) умноженную на число.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -15 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -495$$

Свойства определителей

Свойство 2:
Определитель равен нулю, если имеются две одынаковые строки (столбца).

Свойства определителей

Свойство 2:
Определитель равен нулю, если имеются две одинаковые строки (столбца).

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =$$

Свойства определителей

Свойство 2:
Определитель равен нулю, если имеются две одинаковые строки (столбца).

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =$$

Свойства определителей

Свойство 2:
Определитель равен нулю, если имеются две одинаковые строки (столбца).

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =$$

Вычтем из одной строки другую

Свойства определителей

Свойство 2:
Определитель равен нулю, если имеются две одинаковые строки (столбца).

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Получим строку, состоящую только из нулей

Свойства определителей

Свойство 2:
Определитель равен нулю, если имеются две одинаковые строки (столбца).

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Применим метод Лапласа по третей строке

Свойства определителей

Свойство 2:
Определитель равен нулю, если имеются две одинаковые строки (столбца).

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Применим метод Лапласа по третьей строке

Свойства определителей

Свойство 2:

Определитель равен нулю, если имеются две одинаковые строки (столбца).

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

Применим метод Лапласа по третей строке

Получили искомый ноль =)

Свойства определителей

Свойство 3: Если две строки(столбца) переставить, то определитель поменяет свой знак.

Свойства определителей

Свойство 3: Если две строки(столбца) переставить, то определитель поменяет свой знак.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Свойство 3: Если две строки(столбца) переставить, то определитель поменяет свой знак.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = {\color{red}(-1)} \cdot \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Свойство 4:
Общий множитель элементов какой-либо строки(столбца) можно вынести за знак определителя

Свойства определителей

Свойство 4:
Общий множитель элементов какой-либо строки(столбца) можно вынести за знак определителя

$$\det\begin{pmatrix} 24 & 14 & 6 \\ 1 & -4 & 9 \\ -3 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Свойство 4:
Общий множитель элементов какой-либо строки(столбца) можно вынести за знак определителя

$$\det \begin{pmatrix} 24 & 14 & 6 \\ 1 & -4 & 9 \\ -3 & -9 & 19 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 12 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 9 \\ -3 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Свойство 5:
Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

Свойства определителей

Свойство 5:
Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}^T$$

Свойства определителей

Свойство 5:
Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$