СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

В задачах для самостоятельной работы ссылки на пособие *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Е.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 частях. – М.: Оникс, 2009. Часть 1. Ссылки совпадают для всех изданий, начиная с четвертого (1986 г.)

Занятие 1. Вычисление определителей.

Определитель **второго порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель **третьего порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель порядка $n-1$, полученный из данного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется минор со знаком: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

В определителе третьего порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},\ A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей.

1. Определитель равен нулю, если он содержит: две одинаковых или пропорциональных ряда (ряд – строка или столбец); ряд из нулей.

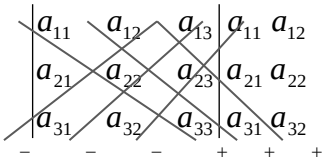
2. Определитель не изменится, если к любому его ряду прибавить другой ряд, умноженный на некоторое число.

3. Разложение определителя по любой строке (столбцу):

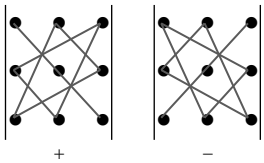
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \ldots = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Способы вычисления определителя третьего порядка.

а). Правило **Саррюса (дополнения)**:



б). Правило **треугольников:**



в). Разложение определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

г). Использование свойств определителя. Все элементы, кроме одного, некоторого ряда с помощью свойства 2 делаются нулями, а затем применяется разложение определителя по этой строке (свойство 3).

Примеры. Вычислить определители, делая все элементы какого-либо ряда, кроме одного, нулями.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. 1. Первая строка является рабочей: умножаем ее на -1 и складываем с второй строкой; умножаем первую строку на 2 и складываем с третьей строкой. Элементы 1 и -2 во втором столбце становятся нулями. Разлагаем определитель по элементам второго столбца и вычисляем его:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -7 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} +$$

$$+ a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} = 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot 1\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(7\cdot 1 - (-1)\cdot 3) = -10.$$

2. В определителе нет удобного элемента (плюс-минус единицы), с помощью которого можно сделать нулями элементы одного из рядов. Создадим такой элемент, вычитая из первой строки третью, а затем

сделаем нулями второй и третий элементы первой строки, по элементам которой и разложим определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 52 & -10 \\ 3 & 19 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{11} = -(-1)^{1+1} M_{11} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 52 & -10 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} = -(-52 \cdot 1 - (-10) \cdot 19) = -138.$$

Задачи.

Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} a & a \\ -a & a \end{vmatrix}$.

Вычислить каждый определитель по правилу Саррюса и по правилу треугольников.

6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители, разложив их по любой строке или столбцу. Вычислить эти же определители, делая два элемента одного из рядов нулями.

8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Дополнительные задачи.

Вычислить определители второго порядка.

12. $\begin{vmatrix} a+b & -a+b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. 13. $\begin{vmatrix} tg\varphi & 1 \\ -1 & tg\varphi \end{vmatrix}$.

Решить уравнения.

14. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$. 15. $\begin{vmatrix} x^2 & 3x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$.

Решить уравнение и неравенство.

16. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$. 17. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 5. гл. IV, пар. 1.

Вычислить определители второго порядка.

$$18.\ \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}.\quad 19.\ \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 11 \end{vmatrix}.$$

Вычислить каждый определитель по правилу Саррюса и по правилу треугольников.

$$20.\ \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}.\qquad 21.\ \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}.\qquad 22.\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, разложив их по любой строке или столбцу. Вычислить эти же определители, делая два элемента одного из рядов нулями.

$$23.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.\quad 24.\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.\quad 25.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Занятие 2. **Определители 4 и 5 порядков.**

Для определителей порядка выше трех нет отдельных правил вычисления. Определители 4 и 5 порядков вычисляются с помощью свойства: определитель не изменится, если к любому его ряду прибавить другой ряд, умноженный на некоторое число. Используя его все элементы, кроме одного, некоторого ряда делаются нулями, а затем применяется разложение определителя по этому ряду.

Пример. Найти определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Из элементов второго столбца вычтем удвоенные элементы первого столбца; из элементов третьего столбца вычтем утроенные элементы первого столбца; далее разлагаем определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 96 .$$

Задачи.

Вычислить определители.

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}. \quad 3. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 12 & 13 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}. \quad 5. \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 5 & 4 & -2 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Дополнительные задачи.

6. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1 - x_2}{2} & \frac{y_1 - y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 5, п. 2; гл. IV, пар. 1.

Вычислить определители.

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}. \quad 8. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}. \quad 9. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 & 4 & -2 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$10.\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -4 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 5 & -2 \\ -3 & 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Занятие 3. Действия над матрицами.

Матрицей A порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из действительных чисел и содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right).$$

В **транспонированной** матрице переставляются местами строки и столбцы. Она имеет порядок $n \times m$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сумма (разность) матриц *одного порядка*

$$C = A \pm B \ \Leftrightarrow\ c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ \ i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}.$$

Произведение матрицы на число

$$B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Произведением AB матриц A порядка $m \times k$ и B порядка $k \times n$ называется матрица $C = AB$ порядка $m \times n$, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n});$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Некоммутативность (неперестановочность) умножения матриц:

$$AB \neq BA.$$

Примеры. 1. Найти матрицу $C = 3A - 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. $3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}$.

$$2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$C = 3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 15 & -21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-8) & -9-4 \\ 15-2 & -21+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 13 & -15 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц AB и BA (если это возможно), вначале определив порядок результата:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет порядок 2×3, матрица B – 3×2, поэтому порядки произведений AB – 2×2, BA – 3×3. Сразу видно, что $AB \neq BA$. Умножение матриц производится «углом»: элементы строки первого множителя умножаются на соответствующие по порядку элементы столбца второго множителя и произведения складываются.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}. \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) & 0 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3) & 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -12 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ 12 & -9 & 14 \end{pmatrix}.$$

Задачи.

Найти линейные комбинации заданных матриц.

1. $C = 4A - 5B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. $C = 4B + 3A$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $D = 2A + 4B - 3C$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц AB и BA (если это возможно), вначале определив порядок результата.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти произведение матриц, вначале определив порядок результата:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведение $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи.

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X такую, что $3A - 2X = E$.

10. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Доказать перестановочность матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. IV, пар. 2.

12. Найти линейную комбинацию заданных матриц.

$$C = 4B - 3A,\ A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти произведение матриц AB и BA (если это возможно), вначале определив порядок результата.

13. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Занятие 4. Обратная матрица.

Если A – невырожденная *квадратная* матрица (определитель матрицы $|A| \neq 0$), то существует единственная матрица A^{-1}, называемая **обратной** матрице A такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица.

Чтобы **найти** A^{-1} необходимо:

- вычислить определитель $\Delta = |A|$ матрицы A;
- найти алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента a_{ij} определителя матрицы A;
- составить из чисел A_{ij} матрицу A^*;
- транспонируя матрицу A^*, составить матрицу $(A^*)^T$;
- умножить матрицу $(A^*)^T$ на число $\frac{1}{\Delta}$: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A^*)^T$;
- сделать проверку по определению: $A^{-1} \cdot A = E$.

Примеры. Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ -6 & -3 & -9 \end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ -6 & -3 & -9 \end{vmatrix}=-54-63-60+54+60+63=0$. Для матрицы A обратной матрицы не существует.

2. $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=12+0-5+9-0-2=14\neq 0$. Обратная матрица A^{-1} существует. Находим алгебраические дополнения элементов определителя $|A|$.

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=6$. $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-7$. $A_{13}=+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=3$.

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$. $A_{22}=+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7$. $A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1$.

$A_{31}=+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-4$. $A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-7$. $A_{33}=+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5$.

Составляем матрицу A^* и транспонируем ее:

$$A^*=\begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ -2 & 7 & -1 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad (A^*)^T=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -7 & 7 & -7 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица: $A^{-1}=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -7 & 7 & -7 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка $A^{-1}\cdot A=E$:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -7 & 7 & -7 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 12-2+4 & 6-6+0 & 18-10-8 \\ -14+7+7 & -7+21+0 & -21+35-14 \\ 6-1-5 & 3-3+0 & 9-5+10 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Задачи.

Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. 3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи.

7. Найти матрицу $C = \left(A^{-1}\right)^2 + \left(A^T \cdot A\right)^{-1}$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. При каких значениях α существует матрица, обратная данной матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. IV, пар. 2.

Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 14. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}$.

Занятие 5. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера.

Система линейных уравнений третьего порядка имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Правило Крамера: если определитель матрицы системы не равен 0, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta -$ определитель матрицы системы; $\Delta_k -$ определитель, получаемый из определителя Δ заменой k-го столбца столбцом свободных членов, $k = 1, 2, 3$.

Для системы второго порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Примеры. Решить системы уравнений с помощью правила Крамера.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x - y + z = 7, \\ x + 2y + 3z = 8, \\ x + y - 2z = -6. \end{cases}$

Решение.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 16 = 5$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 28 = -4$.

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4$. Проверка. Подставим в систему уравнений $x_1 = 5$, $x_2 = -4$: $\begin{cases} 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = 7, \\ 4 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) = 8. \end{cases}$ $\begin{cases} 7 \equiv 7, \\ 8 \equiv 8. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = -4$.

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 1 - 3 - 2 - 9 - 2 = -27$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -28 + 8 + 18 + 12 - 21 - 16 = -27;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -48 - 6 + 21 - 8 + 54 + 14 = 27;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -36 + 7 - 8 - 14 - 24 - 6 = -81.$$

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 3$. Проверка. $\begin{cases} 3 \cdot 1 - (-1) + 3 = 7, \\ 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 8, \\ 1 + (-1) - 2 \cdot 3 = -6. \end{cases}$

$\begin{cases} 7 \equiv 7, \\ 8 \equiv 8, \\ -6 \equiv -6. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

Задачи.

Решить системы уравнений с помощью правила Крамера.

1. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 8, \\ 6x_1 + 5x_2 = -8. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

Дополнительные задачи.

Решить системы уравнений с помощью правила Крамера.

7. $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = a - b, \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = b - c, \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = c - a. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 5.

Решить каждую систему уравнений с помощью правила Крамера.

9. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 1, \\ x_1 + 11x_2 = 6. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x + y + 3z = -5, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + 2y - z = 6, \\ 3x - y + 3z = -7, \\ 2x + y - 2z = 9. \end{cases}$

Занятие 6. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный метод.

Матричный метод: система линейных уравнений в матричной форме имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения определяется формулой $X = A^{-1}B$.

Пример. Решить систему уравнений с помощью матричного метода:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -9. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 36 + 18 - 18 - 9 + 40 = 5 \neq 0.$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -29; \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -18;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=0;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}=15;\qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=10.$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & -29 & -18\\ 1 & -4 & -3\\ 0 & 15 & 10\end{pmatrix},\quad (A^*)^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -29 & -4 & 15\\ -18 & -3 & 10\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица: $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -29 & -4 & 15\\ -18 & -3 & 10\end{pmatrix}.$

Проверка $A^{-1}\cdot A=E$:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -29 & -4 & 15\\ -18 & -3 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & -3\\ 3 & -3 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1+4+0 & -2+2+0 & 3-3+0\\ -29-16+45 & 58-8-45 & -87+12+75\\ -18-12+30 & 36-6-30 & -54+9+50\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Решение системы $X=A^{-1}B$:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -29 & -4 & 15\\ -18 & -3 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ -9\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5+0+0\\ 145+0-135\\ 90+0-90\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5\\ 10\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix};$$

$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$; $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=0$. Проверка: $\begin{cases}-1-2\cdot 2+0=-5,\\ -4+2\cdot 2+0=0,\\ -3-3\cdot 2+0=-9.\end{cases}$

$\begin{cases}-5\equiv -5,\\ 0\equiv 0,\\ -9\equiv -9.\end{cases}$ Ответ: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=0$.

Задачи.

Решить системы уравнений с помощью матричного метода.

1. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 3, \\ 7x_1 - 2x_2 = 13. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 15, \\ 9x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 15. \end{cases}$

Дополнительные задачи.

7. При каких значениях параметра λ система уравнений $\begin{cases} \lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 = 4, \\ 3x_1 + \lambda x_2 = 6. \end{cases}$ имеет решения?

8. Решить с помощью матричного метода:

$$\begin{cases} ax_1 - bx_2 = a^2 + b^2, \\ bx_1 + ax_2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. IV, пар. 2.

Решить системы уравнений с помощью матричного метода.

9. $\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 = 2, \\ 6x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 13. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

Занятие 7. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для краткости записи хода решения вместо системы рассматриваем **расширенную матрицу** ее коэффициентов, которую приводим к треугольному виду:

$$\overline{A}=\left\langle\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right\rangle \Uparrow$$

с помощью следующих, *не меняющих решения*, преобразований:

1. В $\overline{A}$ можно менять местами строки.

2. Можно в $\overline{A}$ менять местами столбцы *слева от прямой черты.*

3. К одной строке $\overline{A}$ можно прибавить другую, умноженную на некоторое число.

Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх, последовательно находя неизвестные.

Примеры. Решить системы методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=8, \\ 4x_1+\ \ x_2-6x_3=21. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1-x_2+7x_3-2x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+8x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+2x_2+19x_3+x_4=8, \\ 6x_1-5x_2+11x_3-3x_4=-3. \end{cases}$

Решение. 1. $\overline{A}=\left\langle\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -6 & 21 \end{array}\right\rangle$. Третью строку переставляем местами с первой строкой, а второй столбец – с первым:

$$\overline{A}=\left\langle\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -6 & 21 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -6 & 21 \\ 2 & -3 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 21 \\ -3 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right\rangle.$$

Делаем нулями элементы первого столбца -3 и 2, умножая первую строку сначала на 3, затем на -2 и складывая результаты с второй и третьей строками:

$$\overline{A}=\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 21 \\ -3 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 21 \\ 0 & 14 & -15 & 71 \\ 0 & -5 & 14 & -34 \end{array}\right\rangle.$$

Далее делаем нулем элемент -5 во втором столбце. Для этого вторую строку умножаем на 5, третью строку – на 14 и складываем. Результат ставим в третью строку, а вторую строку записываем без изменений:

$$\overline{A}=\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 21 \\ 0 & 14 & -15 & 71 \\ 0 & -5 & 14 & -34 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 21 \\ 0 & 14 & -15 & 71 \\ 0 & 0 & 121 & -121 \end{array}\right\rangle.$$

Первый столбец – это коэффициенты при x_2, второй – при x_1 (первый и второй столбцы переставлялись), третий – при x_3. Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх, последовательно находя неизвестные:

$$121x_3 = -121 \Rightarrow x_3 = -1;\ 14x_1 - 15x_3 = 71 \Rightarrow 14x_1 - 15\cdot(-1) = 71 \Rightarrow 14x_1 = 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 + 4x_1 - 6x_3 = 21 \Rightarrow x_2 + 4\cdot 4 - 6\cdot(-1) = 21 \Rightarrow x_2 = -1.$$

Проверка. $\begin{cases} 12-2-2=8, \\ 8+3-3=8, \\ 16-1+6=21. \end{cases}$ $\begin{cases} 8\equiv 8, \\ 8\equiv 8, \\ 21\equiv 21. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = x_3 = -1$.

2. $\overline{A} = \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{array} \right\rangle$. С помощью первой строки делаем три нуля в первом столбце: первую строку умножаем на -2 и складываем с второй строкой; первую строку умножаем на -4 и складываем с третьей строкой; первую строку умножаем на -6 и складываем с четвертой строкой:

$$\overline{A} = \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & 9 & -15 \end{array} \right\rangle.$$

С помощью второй строки делаем два нуля во втором столбце: вторую строку умножаем на 6 и складываем с третьей строкой; вторую строку складываем с четвертой строкой:

$$\overline{A} = \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & 9 & -15 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{array} \right\rangle.$$

Из четвертой строки вычитаем третью:

$$\overline{A} = \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх:

$$8x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0;\ -45x_3 + 9x_4 = -18 \Rightarrow 9x_4 = -18 \Rightarrow x_4 = -2;$$

$$-x_2 - 6x_3 + 0x_4 = -3 \Rightarrow x_2 = 3;\ x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2 \Rightarrow x_1 - 3 + 0 + 4 = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 1$. Проверка: $\begin{cases} 1-3+0+4=2, \\ 2-9+0+8=1, \\ 4+6+0-2=8, \\ 6-15+0+6=-3. \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \equiv 2, \\ 1 \equiv 1, \\ 8 \equiv 8, \\ -3 \equiv -3. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. $x_4 = -2$.

Задачи.

Решить каждую систему методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

Дополнительные задачи.

6. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 2 \\ 9 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

8. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Найти матрицу, обратную данной матрице

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 5\\ -4 & 6 & 2\\ 3 & 7 & 8\end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. IV, пар. 6.

Решить каждую систему методом Гаусса.

10. $\begin{cases}2x+4y+\ z=4,\\ 3x+6y+2z=4,\\ 4x-\ y-\ 3z=1.\end{cases}$ 11. $\begin{cases}2x+y-z=5,\\ x-2y+2z=-5,\\ 7x+y+z=10.\end{cases}$ 12. $\begin{cases}7x_1-2x_2+3x_3-x_4=4,\\ -x_1+\ x_2-x_3+2x_4=-2,\\ 3x_2-x_3+3x_4=-6,\\ -2x_1-3x_2+x_3-2x_4=6.\end{cases}$

13. $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-x_4=-3,\\ 2x_2-\ 3x_4=1,\\ -x_1+\ 2x_3-\ 2x_4=-2,\\ 3x_1-2x_2+x_3=-4.\end{cases}$ 14. $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-\ x_4=-2,\\ x_2-2x_3+2x_4=-2,\\ -2x_1\ -2x_3+\ x_4=1,\\ 3x_1+2x_2-3x_3=-5.\end{cases}$

Занятие 8. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису.

Вектором называется направленный отрезок. **Координаты вектора** с началом в точке $A(x_1,y_1,z_1)$ и концом в точке $B(x_2,y_2,z_2)$

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=(X;Y;Z).$$

Длина (модуль) вектора:

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Проекция вектора на ось *u*:

$$пр_u\vec{AB}=|\vec{AB}|\cos\varphi,$$

φ – угол между осью u и вектором $\vec{AB}$.

Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|};$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Сумма (разность) векторов $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$:

$$\vec{c}=\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2).$$

Произведение вектора $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ **на число** λ:

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1).$$

Условие коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

где α, β, γ – координаты вектора $\vec{d}$ в системе координат $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Разложение вектора $\vec{a}$ по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Примеры. 1. Найти модуль и направляющие косинусы вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (1;4;-3)$, $\vec{b} = (-2;3;5)$.

Решение. $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(1;4;-3) - (-2;3;5) = (2;8;-6) - (-2;3;5) = (4;5;-11)$.

$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-11)^2} = \sqrt{16 + 25 + 121} = \sqrt{162}$. $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{162}}$, $\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{162}}$,

$\cos\gamma = \frac{-11}{\sqrt{162}}$.

2. Разложить вектор $\vec{x} = (8;8;21)$ по векторам $\vec{a} = (3;2;4)$, $\vec{b} = (2;-3;1)$, $\vec{c} = (2;3;-6)$.

Решение. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

где α, β, γ – координаты вектора $\vec{x}$ в системе координат $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Распишем это векторное равенство покоординатно:

$$8 = \alpha 3 + \beta 2 + \gamma 2,\ 8 = \alpha 2 + \beta(-3) + \gamma 3,\ 21 = \alpha 4 + \beta 1 + \gamma(-6).$$

Запишем результаты в виде системы трех линейных уравнений относительно неизвестных α, β, γ:

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + 2\gamma = 8, \\ 2\alpha - 3\beta + 3\gamma = 8, \\ 4\alpha + \beta - 6\gamma = 21. \end{cases}$$

Эта система решена в примере 1 предыдущего занятия 7. Имеем: $\alpha = 4$, $\beta = \gamma = -1$. Получаем разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{x} = 4\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Задачи.

1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы $3\vec{a}$; $-\frac{1}{2}\vec{b}$; $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$.

2. Вычислить модуль вектора $\vec{a}=(6;3;-2)$ и его направляющие косинусы.

3. Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(-1;2;1)$. Найти координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$.

4. Даны координаты вектора $\vec{a}$: $X=4$, $Y=-12$. Найти Z, если $|\vec{a}|=13$.

5. Найти начало вектора $\vec{a}=(2;-3;-1)$, если его конец совпадает с точкой $(1;-1;2)$.

6. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}=(2;-1;3)$ и $\vec{b}=(-6;3;-9)$. Какой вектор длиннее, во сколько раз и как они направлены?

7. Разложить вектор $\vec{x}=(-2;4;7)$ по векторам $\vec{p}=(0;1;2)$, $\vec{q}=(1;0;1)$, $\vec{r}=(-1;2;4)$

8. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OY углы $\alpha=120^0$, $\beta=45^0$. Какой угол вектор составляет с осью OZ?

Дополнительные задачи.

9. Найти модули суммы и разности векторов $\vec{a}=(3;-5;8)$ и $\vec{b}=(-1;1;-4)$.

10. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$, где $\vec{a}=(3;4;4)$, $\vec{b}=(5;9;7)$.

11. Разложить вектор $\vec{x}=(2;5;-7)$ по векторам $\vec{a}=(2;1;1)$, $\vec{b}=(1;3;1)$, $\vec{c}=(1;1;5)$.

12. Даны: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Найти $|\vec{a}-\vec{b}|$.

13. Дано разложение вектора $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$ по прямоугольному базису. Найти разложение вектора $\vec{d}$, коллинеарного $\vec{c}$ и противоположного с ним, при условии, что $|\vec{d}|=75$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. II, пар. 2.

14. При каких α,β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны?

15. Найти конец вектора $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, если его начало находится в точке $(1;2;-3)$.

16. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 12\vec{i} - 15\vec{j} + 16\vec{k}$.

17. Разложить вектор $\vec{x} = (-3;-4;-3)$ по векторам $\vec{a} = (1;2;2)$, $\vec{b} = (0;-1;-1)$, $\vec{c} = (1;2;1)$.

18. Даны: $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 23, |\vec{a} + \vec{b}| = 30$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

19. В треугольнике ABC вектор $\vec{AB} = m$ и вектор $\vec{AC} = n$. Построить следующие векторы: $\frac{m+n}{2}$, $\frac{m-n}{2}$, $\frac{n-m}{2}$, $-\frac{m+n}{2}$.

Занятие 9. Скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение векторов – *число*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi;$$

1). проекция вектора на вектор

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|};$$

2). если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Свойства:

1). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2). $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

3). скалярный квадрат $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;

4). $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

5). $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

Условие перпендикулярности векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Примеры. 1. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – единичные векторы, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Решение. $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+$

$$+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=$$

$$=1+1+1+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=3++2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0;$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$.

2. Найти угол A в треугольнике ABC, если $A(2;-3;1)$, $B(-1;-1;4)$, $C(2;-4;2)$.

Решение. Построим векторы $\vec{AB}=(-3;2;3)$ и $\vec{AC}=(0;-1;1)$, и найдем угол между ними:

$$\cos A=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}=\frac{-3\cdot 0+2\cdot(-1)+3\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2+2^2+3^2}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{44}}=\frac{1}{2\sqrt{11}}.$$

$$A=\arccos\frac{1}{2\sqrt{11}}=81{,}3^0.$$

3. Вычислить длину большей из диагоналей параллелограмма, со сторонами $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=5$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Большая диагональ параллелограмма $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=4\vec{p}-3\vec{q}$.

$$|\vec{c}|^2=(4\vec{p}-3\vec{q})^2=16\vec{p}^2-24\vec{p}\cdot\vec{q}+9\vec{q}^2=16|\vec{p}|^2-24|\vec{p}||\vec{q}|\cos\alpha+9|\vec{q}|^2=$$

$$=16\cdot 2^2-24\cdot 2\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{3}+9\cdot 5^2=64-240\cdot 0{,}5+225=169.\ |\vec{c}|=\sqrt{169}=13.$$

4. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(1;-2;2)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=-18$.

Решение. Т.к. $\vec{x}\,||\,\vec{a}$, то координаты векторов пропорциональны: $\vec{x}=\lambda\vec{a}=$ $=(\lambda;-2\lambda;2\lambda)$. $\vec{x}\cdot\vec{a}=\lambda-2(-2\lambda)+2\cdot 2\lambda=\lambda+4\lambda+4\lambda=9\lambda=-18$; $\lambda=-2$.

Тогда $\vec{x}=(-2;4;-4)$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=(3;-1;-4)$, когда точка ее приложения прямолинейно передвигается из положения $M_1(1;-5;2)$ в положение $M_2(2;-1;1)$.

Решение. Найдем вектор $\vec{M_1M_2}=(1;4;-1)$. Работа силы равна ее скалярному произведению на пройденный путь:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{M_1M_2}=3\cdot 1-1\cdot 4-4\cdot(-1)=3-4+4=3.$$

Задачи.

1. Упростить выражение $(2\vec{i}-\vec{j})\vec{j}+(\vec{j}-2\vec{k})\vec{k}+(\vec{i}-2\vec{k})^2$.

2. Дано $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\perp\vec{b}$. Найти $(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$.

3. Найти угол между векторами $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(6;4;-2)$.

1. При каком значении m векторы $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

5. Даны точки $A(3;3;-2),\ B(0;-3;4),\ C(0;-3;0),\ D(0;2;-4)$. Найти $np_{\vec{AB}}\vec{CD}$.

6. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$ и перпендикулярный векторам $\vec{a}=(2;-3;1)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$.

7. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c}=5\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

8. Вычислить работу силы $\vec{F}=(2;-3;-1)$, когда точка ее приложения прямолинейно передвигается из положения $M_1(2;-5;3)$ в положение $M_2(5;-7;1)$.

Дополнительные задачи.

9. Доказать, что вектор $\vec{p}=\vec{b}-\vec{a}\cdot\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\vec{a}^2}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

10. Даны вершины треугольника $A(1;-1;5),\ B(-2;-1;1),\ C(5;-1;2)$. Найти внешний угол при вершине B.

11. $\vec{a}=\left(\dfrac{3}{2},1,-\dfrac{5}{2}\right)$, $\vec{b}=(-3;-2;5)$. Существует ли вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{a}\cdot\vec{x}=2$, $\vec{b}\cdot\vec{x}=3$?

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. II, пар. 3.

13. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;-4)$ и $\vec{b}=(6;-3;2)$. Найти: $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

14. Найти угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, если $A(3;3;-2)$, $B(0;-3;4)$, $C(2;-3;1)$.

15. Даны два вектора: $\vec{a}=(10;2;-11)$ и $\vec{b}=(-2;1;-2)$. Найти проекцию каждого из них на ось другого вектора.

16. При каком значении α перпендикулярны векторы $\vec{a}=(1;2;\alpha)$ и $\vec{b}=(\alpha;-3;2)$

17. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=120^0$ и $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$. Найти $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

18. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=3$.

19. Вычислить работу силы $\vec{F}=(8;4;-6)$ при перемещении точки ее приложения из начала в конец вектора $\vec{s}=(5;-3;2)$.

20. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, вычислить угол между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

Занятие 10. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение – *вектор*

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b},$$

определяемый условиями:

1). $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$;

2). вектор $\vec{c}$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$, и вектору $\vec{b}$;

3). вектор $\vec{c}$ направлен так, что с его конца переход от первого сомножителя $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден как переход против часовой стрелки.

В координатах, если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\left\{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}. \quad |\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}.$$

Свойства:

1). $\vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$;

2). $\vec{a}\times\vec{a}=0$;

3). $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

4). $\vec{i}\times\vec{i}=0$, $\vec{j}\times\vec{j}=0$, $\vec{k}\times\vec{k}=0$; $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$; $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

Геометрически, модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi.$$

Примеры. 1. Упростить: $(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})\times(4\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k})$.

Решение. $(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})\times(4\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k})=8\vec{i}\times\vec{i}-12\vec{j}\times\vec{i}+16\vec{k}\times\vec{i}+$
$+10\vec{i}\times\vec{j}-15\vec{j}\times\vec{j}+20\vec{k}\times\vec{j}-12\vec{i}\times\vec{k}+18\vec{j}\times\vec{k}-24\vec{k}\times\vec{k}=12\vec{k}+16\vec{j}+10\vec{k}-$
$-20\vec{i}+12\vec{j}+18\vec{i}=-2\vec{i}+28\vec{j}+22\vec{k}$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(2;3;-4)$, $\vec{b}=(-4;1;-1)$. Найти $(3\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$.

Решение. $(3\vec{a}+2\vec{b})=(-2;11;-14)$; $\vec{a}+\vec{b}=(-2;4;-5)$.

$$(3\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 11 & -14\\ -2 & 4 & -5\end{vmatrix}=-55\vec{i}+28\vec{j}-8\vec{k}+22\vec{k}-10\vec{j}+56\vec{i}=$$

$=\vec{i}+18\vec{j}+14\vec{k}$.

3. Найти площадь и меньшую высоту параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(5;-3;0)$, $\vec{b}=(6;1;-2)$.

Решение. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -3 & 0\\ 6 & 1 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}+5\vec{k}+18\vec{k}+10\vec{j}=6\vec{i}+10\vec{j}+18\vec{k}$.

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{6^2+10^2+18^2}=\sqrt{36+100+324}=\sqrt{460}=2\sqrt{115}.$$

$|\vec{a}|=\sqrt{34}$, $|\vec{b}|=\sqrt{41}$. Меньшая высота проведена к стороне, лежащей на векторе $\vec{b}$. $S=h\cdot|\vec{b}|$, $h=\dfrac{S}{|\vec{b}|}=2\sqrt{\dfrac{115}{41}}$.

4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30^0.

Решение. $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{b}\times\vec{b}=$

$$-\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}==\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{a}\times\vec{b}=3\vec{a}\times\vec{b}.$$

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{3}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{3}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin 30^0=\frac{3}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

Задачи.

1. Упростить: $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$.

3. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$.

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45^0.

5. Найти синус угла между векторами $\vec{a}=(2;-4;4)$ и $\vec{b}=(2;1;-2)$.

6. Дан треугольник с вершинами $A(3;-4;5)$, $B(5;-3;7)$, $C(6;-8;7)$. Найти длину высоты CD.

7. Даны три вектора $\vec{a}=(1;2;2)$, $\vec{b}=(2;3;4)$ и $\vec{c}=(5;1;3)$. Найти $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

Дополнительные задачи.

8. Доказать: $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{b}$.

9. Найти площадь параллелограмма, три последовательных вершины которого находятся в точках $A(7;-5;6)$, $B(9;-4;8)$, $C(6;0;6)$.

10. Сила $\vec{F}=(4;-3;-7)$ приложена к точке $A(1;6;5)$. Найти момент этой силы относительно начала координат.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. II, пар. 3.

11. Упростить: $2\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}\cdot(\vec{i}\times\vec{j})$.

12. Найти координаты $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$, если векторы $\vec{a}=(3;-1;-2)$ и $\vec{b}=(1;2;-1)$.

13. Найти синус угла между векторами $\vec{a}=(6;-3;2)$ и $\vec{b}=(2;1;-2)$.

14. Найти расстояние от точки $C(4;-1;2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;3;4)$ и $B(3;4;2)$.

15. Даны три вектора $\vec{a}=(1;2;2)$, $\vec{b}=(2;3;4)$ и $\vec{c}=(5;1;3)$. Найти $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

16. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^0. Найти $\left|(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\right|$.

Занятие 11. Смешанное произведение векторов.

Смешанное произведение векторов – *число*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Геометрически – объемы параллелепипеда и пирамиды:

$$V_{пар} = \pm\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}, \quad V_{пир} = \pm\frac{1}{6}\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

Условие компланарности векторов:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0.$$

Примеры. 1. Лежат ли точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ в одной плоскости?

Решение. Построим векторы, с началом в одной точке и концами в трех других, и если векторы компланарны, то их начало и концы также лежат в одной плоскости: $\vec{AB} = (-2;-6;1)$, $\vec{AC} = (4;-3;-2)$, $\vec{AD} = (-4;-2;2)$.

Условие компланарности векторов: $\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = 0$.

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 8 - 48 - 12 + 8 + 48 = 0.$$

Смешанное произведение равно нулю, следовательно, векторы компланарны, и точки лежат в одной плоскости.

2. Найти объем пирамиды с вершинами $A(-2;2;4)$, $B(3;0;1)$, $C(6;-1;2)$, $D(3;4;5)$ и ее высоту, опущенную на плоскость ABC.

Решение. Строим векторы, исходящие из одной точки: $\vec{AB} = (5;-2;-3)$, $\vec{AC} = (8;-1;-2)$, $\vec{AD} = (5;2;1)$. $V_{пир} = \pm\frac{1}{6}\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} =$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-5 - 48 + 20 - 15 + 20 + 16) = \pm\frac{1}{6}(-12) = 2.$$

Найдем площадь треугольника ABC по формуле $S = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

$$\vec{AB}\times\vec{AC}==\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -2 & -3\\ 8 & -1 & -2\end{vmatrix}=4\vec{i}-24\vec{j}-5\vec{k}+16\vec{k}+10\vec{j}-\vec{i}=3\vec{i}-14\vec{j}+11\vec{k}.$$

$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{9+196+121}=\sqrt{326}$. $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{326}$. $V_{пир}=\frac{1}{3}S_{ABC}h$,

$$h=\frac{3V_{пир}}{S_{ABC}}=\frac{6\cdot 2}{\sqrt{326}}=\frac{12}{\sqrt{326}}.$$

Задачи.

1. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=(1;-2;1)$, $\vec{c}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

2. Найти объем пирамиды с вершинами $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, ее высоту, опущенную на плоскость OAB, длину ребра AB, площадь грани OAB.

3. Лежат ли точки $A(2;-1;-2), B(1;2;1), C(2;3;0), D(5;0;-6)$ в одной плоскости?

4. Показать, что компланарны векторы $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$.

5. При каком значении λ векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\lambda\vec{k}$, $\vec{b}=(0;1;0)$, $\vec{c}=(3;0;1)$ компланарны?

6. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

7. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2}, |\vec{b}|=4,$ угол между векторами равен 135^0.

Дополнительные задачи.

8. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})$.

9. Объем тетраэдра $v=5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, лежащей на оси Ox.

10. Показать, что ни при каком m векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+(m+1)\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ не могут быть компланарными.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. II, пар. 3.

11. Найти смешанное произведение векторов

$$\vec{a} = 9\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k},\ \vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k},\ \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

12. Найти объем пирамиды с вершинами $A(2;3;1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, $D(-5;-4;8)$, ее высоту, опущенную на плоскость ABC, длину ребра AB, площадь грани.

13. Установить компланарность векторов $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$, $\vec{c} = (1;9;-11)$.

14. Лежат ли точки $A(9;-11;5)$, $B(7;4;-2)$, $C(-7;13;-3)$, $D(1;1;1)$ в одной плоскости?

15. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 120^0. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{m}$.

16. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

17. Найти единичный вектор $\vec{d}$, зная, что, где $\vec{a} = (2;1;1)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.