Занятие 12. Простейшие задачи на плоскости.

Уравнение линии на плоскости

$$F(x;y)=0.$$

Расстояние между двумя точками $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Координаты точки M, **делящий отрезок** M_1M_2, **где** $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ **в данном отношении** $\lambda=\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$**:**

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Координаты середины отрезка ($\lambda=1$):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Полярные координаты:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi;\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\ \sin\varphi=\frac{y}{r},\ \cos\varphi=\frac{x}{r}.$$

Примеры. 1. Найти траекторию точки A, которая движется так, что ее расстояние от точки $P(6;0)$ в четыре раза больше расстояния от точки $Q(3/8;0)$.

Решение. Пусть точка $M(x;y)$ – произвольная точка траектории. Тогда, по условию задачи $|MP|=4|MQ|$. В координатах

$$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=4\sqrt{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+y^2}.$$

Возводим равенство в квадрат и раскрываем скобки:

$$x^2-12x+36+y^2=16x^2-12x+\frac{9}{4}+16y^2.$$

Приводим подобные члены:

$15x^2+15y^2=\dfrac{135}{4}$. Отсюда $x^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ и $4x^2+4y^2=9$ – уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R=3$.

2. В треугольнике с вершинами $A(7;5), B(3;-2), C(5;4)$ найти длину медианы, проведенной из вершины A, и площадь треугольника.

Решение. Медиана AM, где M – середина стороны BC:

$$x_M=\frac{3+5}{2}=4,\;\; y_M=\frac{-2+4}{2}=1;\; M(4;1).$$

Длина медианы AM:

$$|AM|=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}=5.$$

Площадь треугольника:

$$S_\Delta=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_A&x_B&x_C\\y_A&y_B&y_C\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\7&3&5\\5&-2&4\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(12-14+25-15+10-20)=$$

$$=\pm\frac{1}{2}(-2)=1.$$

3. Отрезок, ограниченный точками $A(2;-4)$, $B(6;4)$, разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

Решение. Пусть M и N – точки деления, $\dfrac{|AM|}{|MB|}=\dfrac{1}{2}=\lambda_1$, $\dfrac{|AN|}{|NB|}=\dfrac{2}{1}==2=\lambda_2$.

Координаты точки M: $x_M=\dfrac{x_A+\lambda_1x_B}{1+\lambda_1}=\dfrac{2+\frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{3}$; $y_M=\dfrac{y_A+\lambda_1y_B}{1+\lambda_1}=$

$=\dfrac{-4+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=-\dfrac{4}{3}$; $M\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. Координаты точки N:

$$x_N=\frac{x_A+\lambda_2x_B}{1+\lambda_2}=\frac{2+2\cdot 6}{1+2}=\frac{14}{3};\;\; y_M=\frac{y_A+\lambda_2y_B}{1+\lambda_2}=\frac{-4+2\cdot 4}{1+2}=\frac{4}{3};\;\; N\left(\frac{14}{3};\frac{4}{3}\right).$$

4. Найти полярные координаты точки $M(1;-1)$ и прямоугольные координаты точки $N(\sqrt{2};3\pi/4)$.

Решение. Для точки M $x=1,\ y=-1$. Полярные координаты: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$; $\sin\varphi=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$. $M\left(\sqrt{2};-\pi/4\right)$.

Для точки N $r=\sqrt{2},\ \varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$. Прямоугольные координаты: $x=r\cos\varphi=$ $=\sqrt{2}\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-1$; $y=r\sin\varphi=\sqrt{2}\sin\varphi=\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4}=$ $=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$. $N(-1;1)$.

Задачи.

1. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A(2;0)$ и $B(0;2)$ равна квадрату расстояния между точками A и B.

2. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(1;1)$ и $B(3;3)$.

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4;0)$ втрое дальше, чем от начала координат.

4. Даны точки $A(-2;5)$, $B(4;17)$. Расстояние от точки C до точки A в два раза больше, чем до точки B. Найти координаты точки C.

5. Точка $C(2;3)$ служит серединой отрезка AB. Найти координаты точки A, если $B(7;5)$.

6. Найти площадь треугольника, заданного вершинами $A(-2;-4)$, $B(2;8)$, $C(10;2)$.

7. Найти полярные координаты точек $M(1;-\sqrt{3}),\ N(2\sqrt{3};2)$.

8. Найти прямоугольные координаты точек $M(2\sqrt{2};3\pi/4), N(2;-\pi/4)$.

9. Построить в полярных координатах линию $r=a\cos\varphi$ $(a>0)$.

Дополнительные задачи.

10. Даны две вершины треугольника $A(3;8)$, $B(10;2)$ и точка пересечения медиан $M(14;0)$. Найти третью вершину треугольника и его площадь.

11. Найти расстояние между точками $M(3;\pi/4), N(4;3\pi/4)$

12. Показать, что треугольник с вершинами $A(-3;-3)$, $B(-1;3)$, $C(11;-1)$ прямоугольный.

13. Построить в полярных координатах линию $r=a(1-\sin\varphi)$ $(a>0)$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 1.

14. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A(1;0)$ и $B(0;1)$ равна 2.

15. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(4;0)$ вдвое дальше, чем от точки $B(2;3)$.

16. Составить уравнение линии, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $A(-2;0)$ и $B(2;0)$ равна $2\sqrt{5}$.

17. Отрезок, ограниченный точками $A(1;\ -3)$, $B(4;3)$, разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

18. Даны три вершины параллелограмма $A(11;4)$, $B(-1;-1)$, $C(5;7)$, найти четвертую вершину.

19. Построить в полярных координатах линию $r = a\sin\varphi\ \ (a > 0)$.

20. Найти полярные координаты точек $M(1;1), N(\sqrt{3};-1)$.

21. Найти прямоугольные координаты точки $M(2\sqrt{2};\pi/4)$.

22. Найти площадь параллелограмма с вершинами $A(-2;3)$, $B(4;-5)$, $C(-3;1)$.

Занятие 13. Прямая на плоскости.

Уравнения прямой:

общее: $Ax + By + C = 0$, нормальный вектор $\vec{n} = (A;B)$ перпендикулярен прямой;

с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, k – угловой коэффициент прямой, $k = tg\alpha$, α – угол между прямой и осью Ox, b – отрезок, отсекаемый прямой от оси Oy;

проходящей через две точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;

в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, a – отрезок, отсекаемый прямой от оси Ox, b – отрезок, отсекаемый прямой от оси Oy;

проходящей через данную точку $M(x_0;y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Примеры. 1. Прямая проходит через точки $A(-4;3)$ и $B(1;5)$. Найти ее уравнение с угловым коэффициентом, общее уравнение и уравнение в отрезках.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A и B:

$\frac{x+4}{1+4}=\frac{y-3}{5-3}$, $\frac{x+4}{5}=\frac{y-3}{2}$, $2(x+4)=5(y-3)$, $2x-5y+23=0$ – общее уравнение прямой; выразим из него y: $y=\frac{2}{5}x+\frac{23}{5}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=\frac{2}{5}$; в общем уравнении перенесем свободный член 23 в левую часть и разделим обе части на -23: $\frac{2x}{-23}-\frac{5y}{-23}=1$; отсюда $\frac{x}{-23/2}+\frac{y}{23/5}=0$ – уравнение прямой в отрезках, $a=-\frac{23}{2}$ – отрезок, отсекаемый прямой от оси Ox, $b=\frac{23}{5}$ – отрезок, отсекаемый прямой от Oy.

2. Даны уравнения сторон прямоугольника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

Решение. Даны уравнения двух взаимно перпендикулярных сторон прямоугольника, т.к. выполняется условие перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями: $2\cdot 3-3\cdot 2\equiv 0$. Вершина A не лежит на этих прямых, поскольку ее координаты не удовлетворяют уравнениям прямых: $2\cdot 2-3\cdot(-3)+5=18\neq 0$, $3\cdot 2+2\cdot(-3)-7=-7\neq 0$. Тогда обе прямые с неизвестными уравнениями проходят через эту вершину.

Найдем уравнение стороны, параллельной стороне, заданной уравнением $2x-3y+5=0$, для чего приведем это уравнение к уравнению с угловым коэффициентом, находя y: $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. Угловой коэффициент $k=\frac{2}{3}$. Используем уравнение прямой, проходящей через точку A с заданным угловым коэффициентом: $y-y_0=k(x-x_0)$. Отсюда $y+3=\frac{2}{3}(x-2)$, $2x-3y-13=0$.

Найдем уравнение стороны, параллельной стороне, заданной уравнением $3x+2y-7=0$. Это уравнение отличается от данного только свободным членом в силу параллельности прямых: $3x+2y-C=0$. Подставляем в уравнение координаты точки A и находим C: $3\cdot 2+2\cdot(-3)-C=0$, $C=0$. Имеем уравнение $3x+2y=0$.

Задачи.

1. При каком значении a прямые $7x-2y-5=0$, $x+7y-8=0$, $ax+ay-8=0$ пересекаются в одной точке?

2. Определить, какие из точек $A(3;1)$, $B(2;3)$, $C(6;3)$ лежат на прямой $2x-3y-3=0$ и какие не лежат на ней.

3. Вершины треугольника ABC находятся в точках $A(-5;1)$, $B(2;5)$, $C(1;-1)$. Найти: длину и уравнение стороны BC; длину и уравнение медианы, проведенной из вершины C; площадь треугольника.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;-4)$ и $B(-2;-1)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;-4)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(3;-1;2)$.

6. Найти угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемой на оси Oy, для прямых, заданных общими уравнениями $5x-y+3=0$, $2x+3y-6=0$.

7. Составить уравнения прямых в отрезках для прямых, заданных общими уравнениями $5x-y+3=0$, $2x+3y-6=0$.

8. Прямая отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат равна 8.

9. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(2;-5)$, $B(3;2)$.

Дополнительные задачи.

10. Даны стороны треугольника $x-y+2=0$ (AB), $x=2$ (BC), $x+y-2=0$ (AC). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC, делящую ее (считая от A) в отношении 1:3.

11. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-y-1=0$, $x-2y=0$ и точка $P(3;-1)$ пересечения его диагоналей. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

12. Даны середины сторон треугольника: $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$, $M_3(3;-4)$. Составить уравнения его сторон.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 2.

13. Определить, какие из точек $A(-3;-3)$, $B(3;-1)$, $C(-2,1)$ лежат на прямой $2x-3y-3=0$ и какие не лежат на ней.

14. Определить площадь треугольника, образованного прямой $4x+3y-36=0$ с осями координат.

15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок, равный 7.

16. Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(13;-4)$. Найти: длину и уравнение стороны BC; длину и уравнение медианы, проведенной из вершины C; площадь треугольника.

17. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;-4)$ и $B(-2;-4)$.

18. Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Найти его площадь.

Занятие 14. Прямая на плоскости.

Угол между двумя прямыми, заданными:

общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$:

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|.$$

Условия параллельности прямых:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},\ k_1=k_2.$$

Условия перпендикулярности прямых:

$$A_1A_2+B_1B_2=0,\ k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

Расстояние от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пример. Даны вершины треугольника ABC $A(2;-2),B(3;4),C(-3;1)$. Найти: длину и уравнение стороны BC; длину и уравнение высоты AK; длину и уравнение медианы CM; угол B; площадь треугольника ABC; координаты точек F_1,F_2, делящих отрезок AB на три равные части.

Решение. 1). Длина $|BC| = \sqrt{(3+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Уравнение BC – как уравнение прямой, проходящей через точки B и C: $\frac{x+3}{3+3} = \frac{y-1}{4-1}$,

$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1}$, $\quad x - 2y + 5 = 0 \quad (BC)$; $\quad k_{BC} = \frac{1}{2}$. Проверка: подставляем в уравнение координаты точек B и C: $3 - 2\cdot 4 + 5 \equiv 0$, $-3 - 2\cdot 1 + 5 \equiv 0$.

2). Длина AK – как расстояние от точки A до прямой BC:

$$|AK| = \pm\frac{1\cdot 2 - 2\cdot(-2) + 5}{\sqrt{1+4}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5}\sqrt{5}.$$

Прямая AK перпендикулярна прямой BC. Условие перпендикулярности: $k_{BC}\cdot k_{AK} = -1$, отсюда $k_{AK} = -2$. Уравнение AK – как уравнение прямой, проходящей через точку A с заданным угловым коэффициентом:

$y - y_0 = k(x - x_0)$, $\quad y + 2 = -2(x-2)$, $\quad 2x + y - 2 = 0 \quad (AK)$. Проверка: $AK \perp BC$: $2\cdot 1 + 1\cdot(-2) \equiv 0$, и проходит через точку A: $2\cdot 2 - 2 - 2 \equiv 0$.

3). Точка M – середина стороны AB: $x_M = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$; $\quad y_M = \frac{-2+4}{2} = 1$,

$M\left(\frac{5}{2};1\right)$. Длина $|CM| = \sqrt{\left(-3-\frac{5}{2}\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{11}{2}$. Уравнение CM –как уравнение прямой, проходящей через точки C и M: $\frac{x-\frac{5}{2}}{-3-\frac{5}{2}} = \frac{y-1}{1-1}$;

$\frac{x-\frac{5}{2}}{-\frac{11}{2}} = \frac{y-1}{0}$; $0\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = -\frac{11}{2}\cdot(y-1)$, $y = 1 \quad (CM)$.

4). Находим векторы $\vec{BA} = (-1;-6)$, $\vec{BC} = (-6;-3)$. Угол между векторами – угол B: $\cos B = \frac{-1\cdot(-6) - 6\cdot(-3)}{\sqrt{1+36}\sqrt{36+9}} = \frac{24}{\sqrt{37}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{185}}$; $\quad B \approx 54^0$.

5). $S_\Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(3+8+6+6+12-2) = \frac{33}{2}$.

6). F_1 и F_2 – точки деления, $\frac{|AF_1|}{|F_1B|} = \frac{1}{2} = \lambda_1$, $\frac{|AF_2|}{|F_2B|} = \frac{2}{1} == 2 = \lambda_2$.

Координаты точки F_1: $x_{F_1}=\dfrac{x_A+\lambda_1 x_B}{1+\lambda_1}=\dfrac{2+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{7}{3}$; $y_{F_1}=\dfrac{y_A+\lambda_1 y_B}{1+\lambda_1}=$

$=\dfrac{-2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=0$; $F_1\left(\dfrac{7}{3};0\right)$. Координаты точки F_2:

$$x_{F_2}=\frac{x_A+\lambda_2 x_B}{1+\lambda_2}=\frac{2+2\cdot 3}{1+2}=\frac{8}{3};\ y_{F_2}=\frac{y_A+\lambda_2 y_B}{1+\lambda_2}=\frac{-2+2\cdot 4}{1+2}=2;\ F_2\left(\frac{8}{3};2\right).$$

Задачи.

1. Показать, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны, а прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

2. Даны точки $A(0;2)$, $B(7;3)$, $C(1;6)$. Найти угол BAC.

3. Даны вершины треугольника ABC $A(2;-1), B(4;3), C(-2;1)$. Найти: длину и уравнение стороны BC; длину и уравнение высоты AK; длину и уравнение медианы CM; угол B; площадь треугольника ABC; координаты точек F_1, F_2, делящих отрезок AB на три равные части.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;-5)$ параллельно прямой $3x+4y+2=0$.

5. Найти расстояние от точки $M(2;-1)$ до прямой $4x+3y+10=0$.

6. Определить расстояние от точки $M(2;-1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=8$ и $b=6$.

7. Найти угол между прямыми $y=5x+7$, $y=-\dfrac{3}{2}x$.

8. Определить расстояние между параллельными прямыми $3x+y-3\sqrt{10}=0$ и $6x+2y+5\sqrt{10}=0$.

9. Даны стороны треугольника $x+3y-7=0$ (AB), $4x-y-2=0$ (BC), $6x+8y-35=0$ (AC). Найти длину высоты, проведенной из вершины B.

Дополнительные задачи.

10. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

11. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;3)$ и $C(6;2)$. Составить уравнения его сторон.

12. Найти уравнения сторон треугольника, зная одну из вершин $A(4;-1)$ и уравнения двух биссектрис $x-1=0$, $x-y-1=0$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 2.

13. Найти взаимно перпендикулярные прямые:

$$x+3y-7=0,\ 4x-y-2=0,\ 3x-y+5=0.$$

14. Даны точки $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$. Найти угол ACB.

15. Даны вершины треугольника ABC $A(1;2), B(4;5), C(10;-2)$. Найти: длину и уравнение стороны BC; длину и уравнение высоты AK; длину и уравнение медианы CM; угол B; площадь треугольника ABC; координаты точек F_1, F_2, делящих отрезок AB на три равные части.

16. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;5)$ параллельно прямой $4x-3y+2=0$.

17. Найти расстояние от точки $M(-2;3)$ до прямой $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

18. Найти угол между прямыми $y=3x+5$, $y=2x-7$.

Занятие 15. Кривые 2 порядка. Общее уравнение, окружность, эллипс.

Уравнение второго порядка (без xy)

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

задает: *окружность* при $A=B$; *эллипс* при $AB>0$ ($A\neq B$); *гиперболу* при $AB<0$ ($A\neq B$); параболу, если $A=0$ или $B=0$.

Уравнения окружности:

с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и радиусом R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$;

с центром в точке $O(0;0)$: $x^2+y^2=R^2$.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Здесь a – *большая полуось* эллипса, лежащая на оси Ox, b – *малая полуось* эллипса, лежащая на оси Oy, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – *фокусы* эллипса, $2c$ – расстояние между фокусами, $c<a$, $a^2=b^2+c^2$; *эксцентриситет* эллипса

$e = \dfrac{c}{a}$, $0 < e < 1$; для окружности $e = 0$ (при $a = b$); вершины эллипса – точки $(\pm a; 0)$, $(0; \pm b)$.

Примеры. 1. Найти уравнение окружности, если точка $M(1; -1)$ – ее центр, а прямая $5x - 12y + 9 = 0$ – касательная к окружности.

Решение. Диаметр окружности лежит на прямой, перпендикулярной касательной. Поэтому расстояние от центра до касательной равно длине диаметра:

$$R = d = \frac{5 \cdot 1 - 12 \cdot (-1) + 9}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{13} = 2.$$

Уравнение окружности: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

2. Установить тип кривой $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ и привести уравнение к каноническому виду.

Решение. Коэффициенты при x^2 и y^2 $A = 4,\ B = 9$; $AB > 0$ ($A \neq B$), имеем эллипс. Выделим полные квадраты по обоим переменным:

$$4x^2 - 40x = 4(x^2 - 10x) = 4(x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25) = 4(x-5)^2 - 100;$$

$$9y^2 + 36y = 9(y^2 + 4y + 4 - 4) = 9(y+2)^2 - 36.$$

Подставляем результаты в уравнение:

$$4(x-5)^2 - 100 + 9(y+2)^2 - 36 + 100 = 4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 - 36 = 0.$$

Отсюда $4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36$. Введем новые переменные $\bar{x} = x - 5$, $\bar{y} = y + 2$. Тогда $4\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 = 36$. Разделив обе части уравнения на 36, получим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{\bar{x}^2}{9} + \dfrac{\bar{y}^2}{4} = 1$ с большой полуосью $a = 3$ и малой полуосью $b = 2$.

3. Составить уравнение эллипса с фокусами на оси абсцисс, если даны точка эллипса $M(\sqrt{15}; -1)$ и расстояние между фокусами $2c = 8$.

Решение. В уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ подставляем координаты точки M: $\dfrac{15}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$; $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 16$; $\dfrac{15}{b^2 + 16} + \dfrac{1}{b^2} = 1.$

$15b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2$; $b^4 = 16$, $b^2 = 4$; $a^2 = b^2 + c^2 = 20$. Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Задачи.

1. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2+2y^2-8x+12y+1=0$. Построить окружность.

Установить тип кривой. В случае эллипса построить его.

2. $x^2-y^2+6x+4y-4=0$. 3. $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$. 4. $y^2+4y=2x$.

5. Составить уравнение эллипса с фокусами на оси абсцисс, если: его большая полуось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$; расстояние между фокусами $2c=8$ и эксцентриситет $e=\dfrac{3}{5}$.

6. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(5/2;\sqrt{6}/4), N(-2;\sqrt{15}/5)$.

7. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2-8x+12=0$, и уравнение прямой, проходящей через эти центры.

8. Найти уравнение окружности, если известны координаты концов одного из его диаметров AB: $A(1;4)$, $B(-3;2)$.

Дополнительные задачи.

9. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой полуосей.

10. Составить уравнение эллипса, если известно, что $F_1(0;0), F_2(1;1)$ – фокусы эллипса, а длина большой оси равна 2.

11. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 3.

12. Построить кривые

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0;\quad x^2+y^2-4x+14y+52=0.$$

13. Составить уравнение эллипса с фокусами на оси абсцисс, если: его большая полуось равна 8, а малая полуось равна 6; большая ось равна 20 и эксцентриситет $e=\dfrac{3}{5}$.

14. Эллипс проходит через точку $M(1;1)$ и имеет эксцентриситет $e=0{,}6$. Составить уравнение эллипса.

15. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$, $C(-3;0)$.

16. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$

17. Даны точки $A(-3;0)$, $B(3;6)$. Найти уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.

18. Определить траекторию точки M, которая при движении остается вдвое ближе к точке $F(-1;0)$, чем к прямой $x=-4$.

Занятие 16. Кривые 2 порядка. Гипербола, парабола.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Здесь a – *действительная полуось* гиперболы, лежащая на оси Ox, b – *мнимая полуось* гиперболы, лежащая на оси Oy, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – *фокусы* гиперболы, $2c$ – расстояние между фокусами, $c>a$, $c^2=b^2+a^2$; *эксцентриситет* эллипса $e=\frac{c}{a}$, $e>1$; *асимптоты* гиперболы $y=\pm\frac{b}{a}x$; вершины гиперболы – точки $(\pm a;0)$; каноническое уравнение *сопряженной* гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$

Канонические уравнения параболы:

$$y^2=\pm 2px,\ p>0;\ x^2=\pm 2py,\ p>0.$$

Здесь p – параметр параболы, для параболы $y^2=2px$ $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – *фокус* параболы, $x=-\frac{p}{2}$ – *директриса*; для параболы $y^2=-2px$ фокус и директриса $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, $x=\frac{p}{2}$; для параболы $x^2=2py$ фокус и директриса $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, $y=-\frac{p}{2}$; для параболы $x^2=-2py$ фокус и директриса $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, $y=\frac{p}{2}$; *эксцентриситет* параболы $e=1$; $(0;0)$ – *вершина* параболы.

Примеры. 1. Найти уравнение гиперболы с фокусами на Ox, если ось $2a=16$ и эксцентриситет $e=\frac{5}{4}$.

Решение. Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $a=8$, $e=\frac{c}{a}=\frac{5k}{4k}$, $a=4k=8$,

$a=4k=8$, $k=2$; $c=5k=10$; $c^2=b^2+a^2$, $100=b^2+64$, $b^2=36$. Искомое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

2. Найти уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7;2)$ и директриса $x-5=0$.

Решение. Сделаем замену переменных $\bar{x}=x-6$, $\bar{y}=y-2$. В новых переменных координаты фокуса $F(1;0)$, а уравнение директрисы $\bar{x}-1=0$. Расстояние между фокусом и директрисой есть параметр параболы $p=2$. Каноническое уравнение параболы в этом случае: $\bar{y}^2=2p\bar{x},\ p>0,$ тогда $\bar{y}^2=4\bar{x}$. Вернемся к старым переменным: $(y-2)^2=4(x-6)$. Раскроем скобки: $y^2-4y+4=4x-24$. Окончательно $x=\frac{1}{4}y^2-y+7$.

Задачи.

1. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найти: полуоси a и b; фокусы; эксцентриситет; уравнения асимптот.

2. Найти фокус и директрису параболы $y^2=2px$.

3. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.

4. Записать каноническое уравнение параболы, если уравнение ее директрисы $x-3=0$.

5. Составить уравнение гиперболы с фокусами на оси абсцисс, если гипербола является равносторонней $(a=b)$ и проходит через точку $M(3;\sqrt{5})$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что ее фокус расположен в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox.

7. Вычислить полуоси гиперболы, если ее асимптоты задаются уравнениями $y=\pm 2x$, и фокусы находятся на расстоянии 5 от начала координат.

8. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 18x$ с прямой $6x + y - 6 = 0$.

Дополнительные задачи.

9. Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x = 1$, чем к точке $A(4;0)$.

10. Через точку $M(0; -1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

11. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $M(5; 4)$ и $N(7; -2\sqrt{2})$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. I, пар. 3.

12. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти полуоси; координаты фокусов; эксцентриситет; уравнения асимптот.

13. Составить уравнение параболы, если расстояние фокуса до вершины равно 3; ее фокус имеет координаты $(5; 0)$, а ось ординат служит директрисой.

14. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

15. Найти координаты вершины параболы, величину параметра и направление оси, если парабола задана уравнением $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.

16. Гипербола симметрична относительно осей координат, проходит через точку $(6; -2\sqrt{2})$ и имеет мнимую ось, равную 3. Написать уравнение гиперболы.

17. Найти фокус и записать уравнение директрисы параболы $7y^2 + 20x = 0$.

Занятие 17. Плоскость в пространстве.

Уравнения плоскости:

проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\vec{N} = (A; B; C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

общее $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{N} = (A; B; C)$ – вектор нормали;

в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a – отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Ox, b – отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oy, c – отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oz;

проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Угол между плоскостями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0:$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_o)$ **до плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Примеры. 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;3)$ и $B(3;1;2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3;-1;4)$.

Решение. Пусть точка $M(x;y;z)$ – произвольная точка плоскости. Построим векторы $\vec{AM} = (x-2; y+1; z-3)$, $\vec{AB} = (1;2;-1)$. Они должны лежать в одной плоскости. В этой же плоскости можно расположить вектор $\vec{a}$. Условие компланарности трех векторов: смешанное произведение трех векторов $\vec{AM} \cdot \vec{AB} \cdot \vec{a} = 0$. Отсюда

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель:

$$8(x-2) - 3(y+1) - (z-3) - 6(z-3) - 4(y+1) - (x-2) = 0$$

$7(x-2) - 7(y+1) - 7(z-3) = 0$, $x - 2 - y - 1 - z + 3 = 0$, $x - y - z = 0$ – искомое уравнение плоскости.

2. Определить, при каком значении l плоскости, заданные уравнениями

$$7x-2y-z=0,\ \ lx+y-3z-1=0$$

перпендикулярны.

Решение. Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

В нашей задаче $A_1=7,\ B_1=-2,\ C_1=-1;\ \ A_2=l,\ B_2=1,\ C_2=-3$. Имеем:

$$7\cdot l-2\cdot 1-1\cdot(-3)=0,\ \ 7l-2+3=0,\ l=-\frac{1}{7}.$$

3. Найти острый двугранный угол между плоскостями, заданными уравнениями $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.

Решение.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{16+24-30}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{256+144+225}}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{9}\sqrt{625}}=\frac{10}{3\cdot 25}=\frac{2}{15}.\ \ \varphi=\arccos\frac{2}{15}\approx 82{,}3^0.$$

Задачи.

Построить плоскости.

1. $2x-4y-8=0$. 2. $6y+18=0$. 3. $x+3y-6z-12=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$.

5. Определить расстояние от точки $M_0(3;5;-8)$ до плоскости $6x-3y+2z-28=0$.

6. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $M(4;-2;1)$, $N(2;4;-3)$.

7. Записать уравнение в отрезках для плоскости $x+2y-3z-6=0$.

8. Найти угол между плоскостями $x-y\sqrt{2}+z-1=0$ и $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

10. Найти расстояние от точки $M(-3;2;-1)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-2;-1;6)$.

Дополнительные задачи.

11. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ и через точки $M(0;3;0)$, $N(1;1;1)$.

12. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;-1;3)$ перпендикулярно к плоскостям $x+y-2z+5=0$; $2x-y+3z-1=0$.

13. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x+2y-2z-2=0$ на расстоянии $d=4$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. III, пар. 1, п. 1.

14. Построить плоскости $2x-3y-4z+12=0$; $4y-3x-2z+24=0$.

15. Вычислить расстояние от точки $P(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1;-1;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(4;-5;-2)$.

16. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;4)$, если она отсекает на оси Oz отрезок вдвое больший, чем на осях Ox и Oy.

17. Даны координаты вершин тетраэдра $A(3;4;5)$, $B(-2;6;1)$, $C(-3;-4;0)$, $D(5;-2;-1)$. Составить уравнения его граней.

18. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;-1;5)$ и $P(4;2;1)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+3z-5=0$.

19. Найти угол между плоскостями $6x+3y-2z=0$ и $x+2y+6z-12=0$.

Занятие 18. Прямая в пространстве.

Уравнения прямой:

как линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases}$$

проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ параллельно направляющему вектору прямой $\vec{P}=(m;n;p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

– канонические уравнения прямой;

параметрические:

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+z_0; \end{cases}$$

проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2}{\left|\vec{P}_1\right|\cdot\left|\vec{P}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$:

$$d=\frac{\left|S_{par}\right|}{|\vec{P}|}=\frac{|M_0\vec{M}_1\times\vec{P}|}{|\vec{P}|}.$$

Примеры. 1. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases}2x-2y+z+3=0,\\3x-2y+2z+17=0.\end{cases}$$

Найти расстояние от точки $M_1(2;3;-1)$ до прямой.

Решение. 1). Получим канонические уравнения прямой: а). Найдем точку, лежащую на прямой. Она должна принадлежать обеим заданным плоскостям. В их уравнениях одну переменную можно выбрать произвольно, в силу бесконечности прямой найдутся соответствующие однозначные значения двух других. Выберем $y=0$ и решаем получившуюся систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases}2x+z+3=0,\\3x+2z+17=0;\end{cases}$ $x=11$, $z=-25$.

Точка $M_0(11;0;-25)$ принадлежит прямой. Проверяем результат подстановкой координат точки в уравнения плоскости:

$$\begin{cases}2\cdot11-2\cdot0-25+3\equiv0,\\3\cdot11-2\cdot0-2\cdot25+17\equiv0.\end{cases}$$

б). Найдем направляющий вектор прямой. Он должен быть перпендикулярен обеим нормалям плоскостей. Этому условию удовлетворяет вектор векторного произведения нормалей:

$\vec{P}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$. $\vec{N}_1=(2;-2;1)$, $\vec{N}_2=(3;-2;2)$. $\vec{P}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

Проверка. Вектор $\vec{P}$ должен быть перпендикулярен каждому из векторов $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$: $2\cdot(-2)-2\cdot(-1)+1\cdot 2\equiv 0$, $3\cdot(-2)-2\cdot(-1)+2\cdot 2\equiv 0$. Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-11}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+25}{2}$. Параметрические уравнения прямой получаем, приравнивая каждое из отношений в канонических уравнениях параметру t:

$\dfrac{x-11}{-2}=t,\ \dfrac{y}{-1}==t,\ \dfrac{z+25}{2}=t$. Параметрические уравнения прямой:

$$x=-2t+11,\ \ y=-t,\ \ z=2t-25.$$

2). Находим расстояние от точки M_1 до прямой. $\overrightarrow{M_0M_1}=(-9;3;24)$;

$$\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{P}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -9 & 3 & 24\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}=30\vec{i}-30\vec{j}+15\vec{k}=15(2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}).$$

$|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{P}|=15\sqrt{4+4+1}=45$; $|\vec{P}|=\sqrt{4+4+1}=3$; $d=\dfrac{|M_0\vec{M}_1\times\vec{P}|}{|\vec{P}|}=\dfrac{45}{3}=15$.

2. Найти тупой угол между прямыми $x=3t-2$, $y=0$, $z=-t+3$ и $x=2t-1$, $y=0$, $z=t-3$.

Решение. Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами $P_1=(3;0;-1)$ и $P_2=(2;0;1)$:

$\cos\varphi=\dfrac{6+0-1}{\sqrt{9+1}\sqrt{4+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{50}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; тупой угол: $\psi=\pi-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\pi}{4}$.

Задачи.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;3;4)$ параллельно вектору $\vec{P}=2\vec{i}+5\vec{j}-8\vec{k}$.

2. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases}2x+3y-16z-7=0,\\ 3x+y-17z=0.\end{cases}$$

3. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M(2;-5;1)$, $N(-1;1;2)$.

4. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x-3y-4z+5=0, \\ x-2y-3z-1=0, \end{cases}$ и $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{4}$.

5. Найти расстояние от точки $M(-1;1;2)$ до прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

6. Даны вершины треугольника $A(5;7;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(1;4;-3)$. Найдите канонические уравнения медианы AD.

Дополнительные задачи.

7. Доказать, что прямые

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}, \quad \begin{cases} 3x+\ \ y-\ 5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$$

перпендикулярны.

8. Показать, что прямые $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\begin{cases} 2x-3y+z-5=0, \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$

параллельны.

9. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M(-1;2;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}=(6;-2;-3)$ и пересекает прямую $x=1+3t,\ y=-1+2t,\ z=3-5t.$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. III, пар. 1, п. 2.

10. Даны точки $A(-1;2;3)$ и $B(2;-3;1)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-1;2)$ параллельно вектору $\vec{AB}$.

11. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;-1;-3)$ параллельно:

а). вектору $\vec{a}=(2;-3;4)$; б). прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{0}$;

в). прямой $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

12. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-\ 2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x\ \ -z=0. \end{cases}$

13. Доказать, что прямая $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;-1;-3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x+3y+z-6=0, \\ 4x-5y-z+2=0. \end{cases}$

15. Записать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку

$M(2;-3;4)$ и параллельной вектору, образующему с осями координат углы $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$, $\gamma=\pi/3$.

Занятие 19. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве.

Условие параллельности прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ **и плоскости** $Ax+By+Cz+D=0$:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\alpha=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Примеры. 1. Найти точку пересечения плоскости $x+y-z=0$ и прямой, проходящей через точки $A(0;0;4)$ и $B(2;2;0)$, и угол между плоскостью и прямой.

Решение. Найдем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{z-4}{0-4}$, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-4}$, $x=y=\dfrac{z-4}{-2}$; направляющий вектор прямой $\vec{P}=(1;1;-2)$.

Запишем параметрические уравнения прямой: $x=t,\ y=t,\ z=-2t+4$, и подставим значения x, y, z в уравнение плоскости, т.к. точка пересечения принадлежит и плоскости, и прямой, и ее координаты удовлетворяют обоим уравнениям: $t+t+2t-4=0$, $4t=4$, $t=1$. Тогда $x=y=1,\ z=2$, точка пересечения $(1;1;2)$. Проверка. Координаты точки должны удовлетворять уравнениям плоскости и прямой: $1+1-2\equiv 0$, $1=1=\dfrac{2-4}{-2}$, $1=1=1$.

Находим угол между плоскостью и прямой: $\vec{N}=(1;1;-1)$ и

$$\sin\alpha=\frac{1\cdot 1+1\cdot 1-1\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{18}}=\frac{4}{3\sqrt{2}};\ \ \alpha\approx 70{,}5^0.$$

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;2;3)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=2, \\ y-z=1. \end{cases}$

Решение. В качестве нормали к плоскости можно взять направляющий вектор прямой, который равен векторному произведению нормалей $\vec{N}_1=(1;0;0)$ и $\vec{N}_2=(0;1;-1)$:

$\vec{N}=\vec{P}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{j}+\vec{k}$; легко проверяется перпендикулярность $\vec{N}$ и векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Находим уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{N}$: $y-2+z-3=0$; $y+z-5=0$.

Задачи.

1. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$ и угол между ними.

2. Доказать, что прямая $x=-2+3t,\ \ y=1-4t,\ \ z=-5+4t$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3;-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-2;1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+\ \ y-z+2=0. \end{cases}$

5. При каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

6. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна прямой $x=3+2t,\ y=5-3t,\ z=-2-2t$?

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{BC}$ и параметрические уравнения медианы BD, если $A(-3;1;0)$, $B(6;3;3)$, $C(9;4;-2)$.

Дополнительные задачи.

8. Найдите угол между плоскостями $x-2y+2z+3=0;\ x+z-5=0$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ параллельно плоскости $2x+3y-4z+5=0$.

10. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;-4;-1)$ и середину отрезка прямой $\begin{cases}3x+4y+5z-26=0,\\ 3x-3y-2z-\ \ 5=0,\end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x+3y-4z+11=0$, $5x+3y-4z-41=0$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. III, пар. 1, п. 2.

11. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$ и плоскости $x+2y-2z+6=0$ и угол между ними.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-1;-1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

13. При каком значении C прямая $\begin{cases}3x-2y+z+3=0,\\ 4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?

14. При каких значениях l и C прямая

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$$

перпендикулярна плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

15. Найти синус угла между плоскостью $2x+y+2z+6=0$ и прямой $x=3,\ y=5-3t,\ z=-2-4t$.