Занятие 20. Нахождение пределов.

Определенные выражения при нахождении пределов: если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$. Краткая запись в этом случае и далее (A– постоянная): $\infty+\infty=\infty$; $\infty\pm A=\infty$; $\infty\cdot A=\infty$ $(A\neq 0)$; $\dfrac{A}{\infty}=0$ $(A\neq 0)$; $\dfrac{A}{0}=\infty$ $(A\neq 0)$; $A^{\infty}=\begin{cases}\infty, A>1,\\ 0, A<1.\end{cases}$

Неопределенности: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\dfrac{0}{0}$, 1^{∞}.

Раскрытие неопределенностей.

$\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделить числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень неизвестного, содержащуюся в дроби. При этом $\dfrac{A}{x^k}\to 0$ при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

$\infty-\infty$. Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму; разность дробей привести к общему знаменателю; неопределенность $\infty-\infty$ приводится к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\dfrac{0}{0}$. а). Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль.

Примеры. Найти пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x^2+3x+1}{5x^2-4x+3}=\dfrac{-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1}{5\cdot 1^2-4\cdot 1+3}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+3x+1}{5x^2-4x+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(-2x^2+3x+1):x^2}{(5x^2-4x+3):x^2}==\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=-\frac{2}{5};\qquad \frac{3}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{4}{x},\ \frac{3}{x^2}\underset{x\to\infty}{\to}0.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^2-3x+2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{4x+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+x+1):x^2}{(4x+3):x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-4x}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-1-x^2+4x}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x-1}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-4x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(7x-1):x}{(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-4x}):x}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+3x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{4x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}}=\frac{7}{1+1}=\frac{7}{2}.$$

6. $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{10}{x^2-25}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x+5-10}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{10}$.

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. $x^3+2x^2-x-2=x(x^2-1)+2(x^2-1)=$

$=x^3+2x^2-x-2=x(x^2-1)+2(x^2-1)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1)$.

$x^2-3x+2=0$. $D=9-4\cdot1=1$; $\sqrt{D}=1$; $x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}$; $x_1=2$ $x_2=1$.

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)(x+1)}{x-2}=\dfrac{(1+2)(1+1)}{1-2}=-6$.

Задачи.

Найти пределы.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2(2-x)^3}{(x+1)(1-x)^4}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$. 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. 9. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$. 10. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$. 12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-14x+12}{x^3+2x^2-3x}$. 13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{3^n+1}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$.

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{\sqrt{3n^2+n}}$. 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$. 17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+...+2n-1}{n+3}-n\right)$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VI, пар. 4.

Найти пределы.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$. 20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{9n^2-1}}$. 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^3(x-1)^7}{3x^{10}}$. 23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{2-4^{n+1}}$. 24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right)$. 27. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$. 28. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

29. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$. 30. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

Занятие 21. Нахождение пределов. Первый замечательный предел.

Раскрытие неопределенностей.

$\dfrac{0}{0}$. а). Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль.

б). Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму, а разность кубических корней – на неполный квадрат суммы или сделать замену.

в). **Первый замечательный предел:**

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to0}\frac{arctg\alpha}{\alpha}=1.$$

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{(\sqrt{5+x}-3)(\sqrt{5+x}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{5+x-9}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(4+x)(\sqrt{5+x}+3)}{x-4}=$$

$=\lim\limits_{x\to 4}[-(4+x)(\sqrt{5+x}+3)]=-8\cdot(\sqrt{9}+3)=-48$.

3. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[4]{2x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt[4]{2x}+2)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x+4})(\sqrt[4]{2x}-2)(\sqrt[4]{2x}+2)}=$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[4]{2x}+2)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x+4})(\sqrt{2x}-4)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[4]{2x}+2)(\sqrt{2x}+4)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x+4})(\sqrt{2x}-4)(\sqrt{2x}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[4]{2x}+2)(\sqrt{2x}+4)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x+4})(\sqrt{2x}-4)(\sqrt{2x}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[4]{2x}+2)(\sqrt{2x}+4)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x+4})(\sqrt{2x}-4)(\sqrt{2x}+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[4]{2x}+2)(\sqrt{2x}+4)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x+4})(2x-16)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[4]{2x}+2)(\sqrt{2x}+4)}{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x+4})}=\frac{(2+2)(4+4)}{2(4+4+4)}=\frac{32}{24}=\frac{4}{3}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\{x=t^6;\ \sqrt[3]{x}=t^2;\ \ \sqrt{x}=t^3;\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,ax}{\sin bx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,ax\cdot ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx\cdot bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{ax}=\frac{b}{a}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4(x/4)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/4)}{x}\right)^4=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/4)}{4(x/4)}\right)^4=\lim\limits_{\frac{x}{4}\to 0}\left(\frac{\sin(x/4)}{4(x/4)}\right)^4=$

$$=\frac{1}{4^4}\left(\lim_{\frac{x}{4}\to 0}\frac{\sin(x/4)}{x/4}\right)^4=\frac{1}{256}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+16}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+16}+4)}{x+16-16}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+16}+4)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}(\sqrt{x+16}+4)=$$
$$=1\cdot(4+4)=8.$$

Задачи.

Найти пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(x/2)}{x}$. 8. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 3x}{x^2}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$.

13. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. 16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. 17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VI, пар. 4.

Найти пределы.

19. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. 20. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. 21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. 23. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. 24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 5x}$. 25. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 4x}{x^2}$. 27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$. 28. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

Занятие 22. Применение эквивалентных бесконечно малых.

Сравнение бесконечно малых в точке $\alpha = 0$**.** Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Если $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \to \alpha$ и обозначаются $f(x) \sim g(x)$.

Эквивалентные бесконечно малые в точке $\alpha = 0$**:**

$$\sin\alpha \sim \alpha;\ \sin^2\alpha \sim \alpha^2;\ tg\alpha \sim \alpha;\ 1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2};\ \arcsin\alpha \sim \alpha;\ \ln(1+\alpha) \sim \alpha;$$

$$e^\alpha - 1 \sim \alpha;\ a^\alpha - 1 \sim \alpha\ln a;\ (1+\alpha)^n - 1 \sim n\alpha;\ \sqrt{1+\alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}.$$

При нахождении пределов бесконечно малую можно заменять на эквивалентную ей.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{tg\,3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \left\{\sqrt{1+2x}-1 \sim \dfrac{2x}{2} = 2;\ tg\,3x \sim 3x\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \{t = x-1,\ x\to 1 \Rightarrow t \to 0\} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\left(e^t-1\right)}{\ln(t+1)} = \left\{e^t - 1 \sim t;\ \ln(t+1) \sim t\right\} = = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+3x}-2):2}{(\sqrt[4]{16+5x}-2):2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x}-1}{\sqrt[4]{1+\frac{5}{16}x}-1} =$$

$$= \left\{\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x}-1 \sim \frac{3}{24}x;\ \sqrt[4]{1+\frac{5}{16}x}-1 \sim \frac{5}{64}x\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 64}{5x\cdot 24} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 64}{5\cdot 24} = \frac{8}{5}.$$

Задачи.

Найти пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{tg\,4x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x^2+2x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x-x^2}-1}{x}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{7x}}{\sin x - 2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5(x+\pi)}{e^{3x}-1}$.

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{tgx}-3^{\sin x}}{\left(tg\dfrac{x}{2}\right)^3}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$. 13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$. 14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VI, пар. 4, 5.

Найти пределы.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 5x}$. 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$. 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x+1}-1}$. 19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\arcsin x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{x-1}$. 21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg\,3x}$. 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$. 24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$. 25. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.

Занятие 23. Второй замечательный предел.

Второй замечательный предел (неопределенность 1^∞):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Правило для нахождения второго замечательного предела:

Если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)v(x)}$.

Правило применимо **только для неопределенности** 1^∞**.**

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x^2+2):2}{(x^2+1):2}\right)^{x^2}=$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+2):x^2}{(x^2+1):x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}\right)^{x^2}=(1^\infty)=$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}-1\right)\cdot x^2\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2:x^2}{(x^2+1):x^2}\right\}=$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2:x^2}{(x^2+1):x^2}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right\}=\exp 1=e.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{5x+1}\right)^x=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+2):x}{(5x+1):x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{2}{x}}{5+\dfrac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x=0.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^x=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+2):x}{(x+1):x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}3^x=\infty.$$

4. $$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=(1^\infty)=\exp\lim_{x\to 0}\left\{(1+2x-1)\cdot\frac{1}{x}\right\}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=\exp 2=e^2.$$

5. $$\lim_{x\to\infty}(x+4)[\ln(2x+7)-\ln(2x-3)]=\lim_{x\to\infty}(x+4)\ln\frac{2x+7}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+7}{2x-3}\right)^{x+4}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-3}\right)^{x+4}=(1^\infty)=\ln\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-3}-1\right)(x+4)\right\}=$$

$$=\ln\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{10(x+4)}{2x-3}\right\}=\ln\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{10(x+4):x}{(2x-3):x}\right\}=\ln\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{10+\dfrac{40}{x}}{2-\dfrac{3}{x}}\right\}=$$

$$=\ln\exp 5=\ln e^5=5\ln e=5.$$

6. $$\lim_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}=(1^\infty)=\exp\lim_{x\to 3}\left\{(3x-8-1)\cdot\frac{2}{x-3}\right\}=\exp\lim_{x\to o}\frac{(3x-9)\cdot 2}{x-3}=$$

$$=\exp\lim_{x\to o}3\cdot 2=\exp 6=e^6.$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+a)-\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+a}{a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{x}{a}+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{a}+1\right)^{\frac{1}{x}}=(1^\infty)=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{a}+1\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\exp\left\{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{a}+1-1\right)\frac{1}{x}\right\}=\ln\exp\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{x}=\ln\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{a}=$$

$$=\ln\exp\frac{1}{a}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}\ln e=\frac{1}{a}.$$

Задачи.

Найти пределы.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)^{x}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+3)-\ln x)$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-5}{2x+3}\right)^{x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)[\ln(2x+5)-\ln(2x-3)]$. 7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1+3x}$. 10. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{x-1}}$.

Дополнительные задачи.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)(\ln(x-2)-\ln(x+2))$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}+x)^{1/x}$. 13. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VI, пар. 4.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$. 16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{10+5x}{10+2x}\right)^{\frac{1}{2x}}$. 17. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)[\ln(2x+7)-\ln(2x-3)]$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{3x^2+3}\right)^{3+3x^2}$. 19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{x+2}\right)^{4x}$. 20. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]$.

21. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$. 22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$. 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{nx}$. 24. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

Занятие 24. Непрерывность функции одной переменной.

Функция является **непрерывной** в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0),$$

то x_0 – точка **устранимого разрыва** (разрыва 1 рода**).**

Если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x),$$

то x_0 – точка разрыва первого рода – **скачка**. Величина скачка:

$$\left|\lim_{x\to x_0+0} f(x) - \lim_{x\to x_0-0} f(x)\right|.$$

Если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$$

и (или)

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty,$$

то x_0 – точка **разрыва второго рода** (бесконечного).

Примеры. Исследовать функции на непрерывность.

$$1.\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0,\\ 0, & 0\le x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}\qquad 2.\ f(x)=\frac{2}{2+5^{\frac{1}{x-2}}}.$$

1. *Решение.* Функция составлена из частей элементарных функций, которые непрерывны в своих областях определения по теореме о непрерывности элементарных функций. Исследованию на непрерывность подлежат точки «склеивания» функций $x=0$, $x=2$. Найдем односторонние пределы.

Точка $x=0$. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} 0 = 0$. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0}\sqrt{1-x} = 1$.

Односторонние пределы в точке не равны и конечны, следовательно, имеем точку разрыва первого рода – скачок, величина которого $|\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to 0-0} f(x)| = |0-2| = 2$.

Точка $x=2$. $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(x-2) = 0$. $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} 0 = 0$. $f(2)=0$.

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = f(2)$. В точке $x=2$ функция непрерывна.

2. *Решение.* Функция может иметь разрыв в точке $x=2$. Найдем односторонние пределы в этой точке.

$\lim\limits_{x\to 2+0} 5^{\frac{1}{x-2}} = \infty$, т.к. степень показательной функции положительна, $\dfrac{1}{x-2}$ и $5^{\frac{1}{x-2}} \to \infty$ при $x \to 2+0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2}{2+5^{\frac{1}{x-2}}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 2-0} 5^{\frac{1}{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{5^{\frac{1}{2-x}}} = 0$, т.к. степень показательной функции отрицательна, $\dfrac{1}{2-x}$ и $5^{\frac{1}{2-x}} \to \infty$ при $x \to 2-0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2}{2+5^{\frac{1}{x-2}}} = 1$. Окончательно, точка $x=2$ является точкой разрыва первого рода – скачком, величина которого равна 1.

Задачи.

Исследовать функции на непрерывность. Построить их графики.

1. $f(x)=\begin{cases}2, & x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x<2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<1,\\ 2, & 1\le x\le 2,\\ 3x, & x>2.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}-2x-1, & x<0,\\ \dfrac{1}{x-1}, & 0\le x\le 1,\\ x+3, & x>1.\end{cases}$ 4. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}-1$. 5. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$.

6. $f(x)=arctg\,\dfrac{2}{x-1}$.

Дополнительные задачи.

7. Исследовать функции на непрерывность. Построить их графики.

1). $f(x)=\dfrac{2}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$. 2). $f(x)=4^{tg\,2x}$.

8. Пусть $f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ A\sin x+B, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ Подобрать числа A и B так,

чтобы функция $f(x)$ была непрерывной; построить ее график.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VI, пар. 6.

Исследовать функции на непрерывность. Построить их графики.

9. $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi,\\ \sin x, & -\pi\le x<0,\\ \pi, & x\ge 0.\end{cases}$ 10. $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1\le x<1,\\ x-1, & 1<x\le 4,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1,\\ \dfrac{1}{x^2-1}, & 1\le x\le 3,\\ x+1, & x>3.\end{cases}$ 12. $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.