Занятие 25. Производная. Дифференциал.

Производная от функции $y = f(x)$ в точке x:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Дифференциал функции $y = f(x)$:

$$dy = y'dx.$$

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. 3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$. 4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Производные основных элементарных функций:

1. $c' = 0$. 2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$; $x' = 1$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$; $\left(e^x\right)' = e^x$. 4. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$; $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.

5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$. 6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$. 7. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. 8. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 10. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 11. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.

12. $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Примеры. 1. Найти производную функции $y = tgx + x$, используя определение производной.

Решение. $\Delta y = tg(x+\Delta x) + x + \Delta x - tgx - x = tg(x+\Delta x) - tgx + \Delta x$;

$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$; отсюда $tg(x+\Delta x) - tgx = \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\cos(x+\Delta x)\cos x} =$

$= \frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cos x}$; $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x} + \frac{\Delta x}{\Delta x}\right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\cos(x+\Delta x)\cos x} + 1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} + 1.$$

2. Под каким углом пересекается парабола $y = x^2$ с прямой $3x - y - 2 = 0$?

Решение. Угол между параболой и прямой равен углу между касательной к параболе и прямой. Вначале найдем точку пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x - 2. \end{cases} \quad 3x - 2 = x^2; \quad x^2 - 3x + 2 = 0; \; x_1 = 1, \; x_2 = 2.$$

Угловой коэффициент касательной $y' = 2x$. В точке $x_1 = 1$ $y'(1) = 2 = k_1$. Угловой коэффициент прямой $k = 3$. Находим угол между параболой и прямой: $tg\varphi = \dfrac{3-2}{1+3\cdot 2} = \dfrac{1}{7}$; $\varphi = arctg\dfrac{1}{7} \approx 8{,}1^0$. В точке $x_2 = 2$ $y'(2) = 4 = k_2$. В этом случае искомый угол $tg\varphi = \dfrac{4-3}{1+3\cdot 4} = \dfrac{1}{13}$. $\varphi = arctg\dfrac{1}{13} \approx 4{,}4^0$.

Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

3. $y = 2x^3 + 3\sqrt[4]{x^3} - 4\log_3 x - 2^x + \cos x$. 4. $y = -\dfrac{3}{x\sqrt{x}} - \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$.

5. $y = x\sin x + x^2 arctgx$. 6. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$; найти $y'(1)$ и $y'(2)$.

3. $y = 2x^3 + 3\sqrt[4]{x^3} - 4\log_3 x - 2^x + \cos x$. $y' = (2x^3 + 3\sqrt[4]{x^3} - 4\log_3 x - 2^x +$

$+\cos x)' = (2x^3)' + (3\sqrt[4]{x^3})' - (4\log_3 x)' - (2^x)' + (\cos x)' = 2(x^3)' + 3\left(x^{3/4}\right)' -$

$-4(\log_3 x)' - (2^x)' + (\cos x)' = 6x^2 + \dfrac{9}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \dfrac{4}{x\ln 3} - 2^x\ln 2 - \sin x =$

$= 6x^2 + \dfrac{9}{4\sqrt[4]{x}} - \dfrac{4}{x\ln 3} - 2^x\ln 2 - \sin x.$

4. $y = -\dfrac{3}{x\sqrt{x}} - \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$. $\quad y = -\dfrac{3}{x^{3/2}} - \dfrac{x^3}{x^{2/3}} + \dfrac{x^2}{x^{3/4}} = -3x^{-3/2} - x^{3-2/3} + x^{2-3/4} =$

$= -3x^{-3/2} - x^{7/3} + x^{5/4}$. $\quad y' = (-3x^{-3/2} - x^{7/3} + x^{5/4})' = -3\,(x^{-3/2})' - (x^{7/3})' + (x^{5/4})' =$

$= \dfrac{9}{2}\,x^{-5/2} - \dfrac{7}{3}x^{4/3} + \dfrac{5}{4}x^{1/4} = \dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}} - \dfrac{7}{3}\,x\sqrt[3]{x} + \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.

5. $y = x\sin x + x^2 arctgx$. $y' = (x\sin x + x^2 arctgx)' = (x\sin x)' + (x^2 arctgx)' =$

$= (x)'\sin x + x(\sin x)' + (x^2)' arctgx + x^2(arctgx)' = \sin x + x\cos x + 2x\,arctgx +$

$+\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

6. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$; найти $y'(1)$ и $y'(2)$. $\quad y' = \dfrac{(x^2-1)'(x^2+4) - (x^2-1)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} =$

$= \dfrac{2x(x^2+4) - (x^2-1)2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{2x^3 + 8x - 2x^3 + 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{10x}{(x^2+4)^2}$. $\quad y'(1) = \dfrac{10\cdot 1}{(1^2+4)^2} = \dfrac{2}{5}$.

$y'(2) = \dfrac{10\cdot 2}{(2^2+4)^2} = \dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16}$.

Задачи.

Найти производные функций, используя определение производной.

1. $y = x^2 - x$; 2. $y = \sqrt{x+4}$. 3. $y = \sin\sqrt{x}$.

2. Найти производные функций, используя таблицу производных.

4. $y = 3x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2}$. 5. $y = x^2 + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{2}{5x^3}$. 6. $y = 4\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x^2}$.

7. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{x}{\sqrt[4]{x}}$. 8. $y = x^3 - 2\sin x + 3ctgx$. 9. $y = x^5 + \cos x + tgx$.

10. $y = x^2 + 2^x + e^x$. 11. $y = \ln x + \log_2 x + \log_3 x$. 12. $y = \arcsin x - \lg x + arcctgx$.

13. $y = x^2\cos x$. 14. $y = \sqrt{x}\,ctgx$. 15. $y = e^x arctgx$. 16. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

17. $y = \dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$. 18. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. 19. $y = \dfrac{3^x}{\sin x + 1}$. 20. $y = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$; найти $y'(0)$ и $y'(1)$.

Найти дифференциалы функций.

21. $y = \left(x^2 + 4x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$. 22. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$. 23. $y = \dfrac{1}{1 - t^2}$. 24. $r = \dfrac{\cos\varphi}{1 - \varphi^2}$.

25. $y = \dfrac{m - n}{x^{0,2}}$.

Дополнительные задачи.

26. При каком значении независимой переменной x касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

27. $f(z) = \dfrac{2z^3 - 3z + \sqrt{z-1}}{z}$. Найти $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

28. Убедиться, что функция $y = \dfrac{1 + \ln x}{x - x\ln x}$ удовлетворяет соотношению $2x^2 dy = (x^2y^2 + 1)dx$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 1, п. 1.

Найти производные функций, используя определение производной.

29. $y = x^3 + 3x$. 30. $y = \sqrt{2x^2 - 1}$. 31. $y = \cos(5x + 3)$.

2. Найти производные функций, используя таблицу производных.

32. $y = 2x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x^3}$. 33. $y = 6x^2 + \dfrac{1}{3x} - \dfrac{2}{x^3}$. 34. $y = 3\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2}$.

35. $y=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$. 36. $y=x^4-\cos x+7tgx$. 37. $y=2x^6+\sin x+4ctgx$.

38. $y=x^2+2^x+e^x$. 39. $y=\ln x+\log_4 x+\log_5 x$. 40. $y=\arccos x-5\lg x+arctgx$.

41. $y=x^2\sin x$. 42. $y=\sqrt{x}\,tgx$. 43. $y=2^x arcctgx$. 44. $y=\dfrac{x^4}{x^2+1}$.

45. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. 46. $y=\dfrac{ctgx}{\sqrt{x}}$. 47. $y=\dfrac{e^x}{\cos x+1}$.

3. Найти дифференциалы функций.

48. $y=\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^2-\sqrt{x}\right)$. 49. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. 50. $r=\dfrac{\sin\varphi}{1-\varphi^2}$. 51. $y=\dfrac{m+n}{\sqrt{x}}$.

Занятие 26. Производная сложной функции.

Функция $f[u(x)]$, зависящая от другой функции, называется **сложной** или суперпозицией функций. $f(u)-$ внешняя функция (или просто функция), $u(x)-$ внутренняя функция (или аргумент).

Возможна суперпозиция любого числа функций: $f[u(v(w(x)))]$.

Производная сложной функции

$$(f[u(x)])'=f'_u[u(x)]\cdot u'(x).$$

Производная сложной функции равна произведению производной функции по аргументу, **с сохранением аргумента**, на производную аргумента по x.

Формула сохраняется для любого числа внутренних функций:

$$(f[u(v(w(x)))])'=f'_u\cdot u'_v\cdot v'_w\cdot w'(x).$$

Примеры. Найти производные сложных функций.

1. $y=\lg(1-3x^2)$. $u=1-x^2$, $f(u)=\lg u$. $y'=(\lg u)'_u\cdot u'_x=\dfrac{1}{u\ln 10}\cdot(1-x^2)'_x=$

$=\dfrac{1}{(1-x^2)\ln 10}\cdot(-2x)'=\dfrac{-2x}{(1-x^2)\ln 10}$. 2. $y=arcctg\dfrac{2x}{3}$. $y'=-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{2x}{3}\right)'=$

$=-\dfrac{9}{1+4x}\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{6}{1+4x}$. 3. $y=\dfrac{4}{\sqrt[4]{3x+5}}=4(3x+5)^{\frac{1}{4}}$.

$y'=4\cdot\dfrac{1}{4}(3x+5)^{-\frac{3}{4}}(3x+5)'=\dfrac{3}{\sqrt[4]{(3x+5)^3}}$. 4. $y=\arcsin^3 x$. $y'=3\arcsin^2 x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $y=\cos 2^{6x}$. $y'=-\sin 2^{6x}\cdot 2^{6x}\ln 2\cdot 6$. 6. $y=\sin e^{\sin^3 3x}$.

$y'=\cos e^{\sin^3 3x}\cdot e^{\sin^3 3x}\cdot 3\sin^2 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=6\cos e^{\sin^3 3x}\cdot e^{\sin^3 3x}\cdot\sin^2 3x\cdot\cos 3x$.

Задачи.

Найти производные.

1. $y = tg7x$. 2. $y = \sin\dfrac{x}{2}$. 3. $y = \left(2x-3\right)^5$. 4. $y = \dfrac{1}{(7-2x)^6}$. 5. $y = \sqrt{4x-5}$.

6. $y = \sqrt[4]{\dfrac{4x}{3} - 5}$. 7. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7x-8}}$. 8. $y = arctg\,\dfrac{3x}{4}$. 9. $y = \arccos\dfrac{1}{x}$.

10. $y = \cos^3 2x$. 11. $y = \sqrt{\cos 4x}$. 12. $y = 5^{\sin 2x}$. 13. $y = \ln^3(x^2+1)$.

14. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. 15. $y = ctg^4 3x$. 16. $y = \lg\ln\log_\pi x$. 17. $y = 6^{\cos^2 3x}$.

18. $y = \sin\cos tgctgx$. 19. $y = \ln^2 \sin^3 5^x$. 20. $y = \ln arcctg\sqrt{4-2x}$.

21. $y = \sqrt[3]{\arccos\dfrac{2}{x}}$. 22. $y = \dfrac{1}{(1+3x^2)^3}$. 23. $y = \cos\dfrac{1}{x^2}$. 24. $y = \sqrt[3]{x^2+3x+1}$.

Дополнительные задачи.

Найти производные.

25. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$. 26. $y = \log_{\sqrt{x-x^2}} \cos^3 x$. 27. $y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$.

28. $y = \ln\sqrt{\dfrac{3x+2}{5x-1}}$.

29. Убедиться, что функция $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$ удовлетворяет соотношению

$$x\frac{dy}{dx} + 1 = e^y.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 1, п. 1.

Найти производные.

30. $y = ctg8x$. 31. $y = \cos\dfrac{x}{3}$. 32. $y = \left(2-3x\right)^7$. 33. $y = \dfrac{1}{(5+3x)^9}$. 34. $y = \sqrt{2-5x}$.

35. $y = \sqrt[5]{(3x-9)^2}$. 36. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{6x-7}}$. 37. $y = arctg\,\dfrac{x}{a}$. 38. $y = arcctg\,\dfrac{a}{x}$.

39. $y = \sin^2 3x$. 40. $y = \sqrt{\sin 6x}$. 41. $y = 6^{\cos 3x}$. 42. $y = \log_2^5(\sqrt{x}+1)$.

43. $y = \sin^4\dfrac{x}{4}$. 44. $y = \ln\log_\pi \lg x$. 45. $y = e^{tg^3 2x}$. 46. $y = \log_2\log_3 tgctgx$.

47. $y = tg^5 \lg^3 x^e$. 48. $y = \lg arctg\sqrt{3-4x}$. 49. $y = \sqrt[4]{\arcsin\dfrac{3}{x^2}}$. 50. $y = s\dfrac{1}{x^3}$

Занятие 27. Производная сложной функции.

$$(f[u(x)])' = f_u'[u(x)]\cdot u'(x).$$

Примеры. Найти производные сложных функций.

1. $y=\log_3\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3 = 3\log_3\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 3\log_3(x^2+1)-3\log_3(x^2-1)$.

$$y' = \frac{3}{x^2+1}\cdot 2x - \frac{3}{x^2-1}\cdot 2x = 6x\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right) = -\frac{12x}{x^4-1}.$$

2. $y=\arcsin(tg\,2x\cdot ctg\,3x)$. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-tg^2 2x\cdot ctg^2 3x}}[(tg\,2x)'ctg\,3x+$

$$+tg\,2x(ctg\,3x)'] = \frac{1}{\sqrt{1-tg^2 2x\cdot ctg^2 3x}}\left(\frac{2}{\cos^2 2x}ctg 3x - tg\,2x\frac{3}{\sin^2 x}\right).$$

3. $y=(1-3x^3)3^{7x-1}\,arctg\sqrt{2x}$. $y'=(1-3x^3)'\,3^{7x-1}\,arctg\sqrt{2x}+$

$$+(1-3x^3)(3^{7x-1})'\,arctg\sqrt{2x}+(1-3x^3)3^{7x-1}(arctg\sqrt{2x})' = -9x^2\,3^{7x-1}\,arctg\sqrt{2x}+$$

$$+(1-3x^3)3^{7x-1}\ln 3\cdot 7\,arctg\sqrt{2x}+(1-3x^3)3^{7x-1}\frac{1}{1+2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2=$$

$$=-9x^2\,3^{7x-1}\,arctg\sqrt{2x}+7\ln 3(1-3x^3)3^{7x-1}\,arctg\sqrt{2x}+(1-3x^3)3^{7x-1}\frac{1}{2\sqrt{2x}(1+2x)}.$$

4. $y=\dfrac{\ln(x^2+3)}{\sin 4x}$. $y'=\dfrac{(\ln(x^2+3))'\sin 4x-\ln(x^2+3)(\sin 4x)'}{\sin^2 4x}=$

$$=\frac{\frac{2x}{x^2+3}\sin 4x-\ln(x^2+3)\cos 4x\cdot 4}{\sin^2 4x} = \frac{2(x\sin 4x-2(x^2+3)\ln(x^2+3)\cos 4x)}{(x^2+3)\sin^2 4x}.$$

Задачи.

Найти производные сложных функций.

1. $y=\ln(1+tgx)$. 2. $y=\lg(\sin x+e^x)$. 3. $y=arctg^3\dfrac{1}{x}$. 4. $y=tg\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

5. $y=x^2\,2^{x^2}$. 6. $y=x\arcsin 5x$. 7. $y=e^{\sqrt{x}}$. 8. $y=\dfrac{x}{3}\cdot\sqrt[3]{\ln 3x}$. $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

9. $y=\dfrac{\cos 4\cdot\ln^3(x^2-2)}{\sqrt{x}}$. 10. $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. 12. $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$. 13. $y=\ln\dfrac{\lg x}{\ln x}$.

14. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. 15. $y=\sin x\cdot e^x\cdot\cos^3 x$. 16. $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+ctgx}+\dfrac{\cos^2 x}{1+tgx}$. 17. $y=\dfrac{xe^x arctgx}{\ln^5 x}$.

18. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$. 19. $y=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)-6\arcsin 2x$.

20. $y=\sqrt[3]{[arctg(\ln\cos 9x)]^2}$. 21. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. 22. $y=\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2$.

Дополнительные задачи.

1. Найти производные сложных функций.

23. $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}arctg\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. 24. $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$. 25. $y=\frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{\arccos^3 x}$.

26. $y=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}$. 27. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{4}{3}}\right)$.

28. Убедиться, что функция $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет соотношению

$$(1-x^2)y'-xy=1.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 1, п. 1.

Найти производные сложных функций.

29. $y=\lg(1+ctgx)$. 30. $y=\ln(\cos x+2^x)$. 31. $y=arcctg^2\frac{1}{x^2}$. 32. $y=ctg\frac{1}{\sin^2 x}$.

33. $y=x\arccos 7x$. 34. $y=x^3 3^{x^3}$. 35. $y=2^{\sqrt{x}}\cdot\arccos e^x$. 36. $y=\frac{x}{4}\cdot\sqrt[4]{\ln 4x}$.

37. $y=\frac{2\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$. 38. $y=\frac{\sin 3\cdot\ln^2(x^2+4)}{2\sqrt{x}}$. 39. $y=arcctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 40. $y=\lg\frac{\ln x}{\lg x}$.

41. $y=\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$. 42. $y=e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$. 43. $y=\cos x\cdot e^x\cdot\sin^2 x$. 44. $y=\frac{\sin^2 x}{1+tgx}+\frac{\cos^2 x}{1+ctgx}$.

45. $y=\frac{x^2e^x arcctgx}{\ln^3 x}$. 46. $y=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$. 47. $y=\arcsin\frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$.

48. $y=3\ln\left(3x-4\sqrt{1-4x^2}\right)+8\arccos 3x$. 49. $y=2^{x^2+3}\cdot e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$. 50. $y=\frac{\ln(x^2-9)}{\sqrt{b}\cos 3x}$.

Занятие 28. Производные высших порядков.

Вторая производная и дифференциал второго порядка:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'; \quad d^2y=y''dx^2.$$

Производная и дифференциал $n-$го порядка:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'; \qquad d^n y = y^n\, dx^n.$$

Примеры. 1. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = x\ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \sqrt{x^2+a^2}$.

Решение. $y' = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} =$

$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \dfrac{x(x+\sqrt{x^2+a^2})}{\sqrt{x^2+a^2}\,(x+\sqrt{x^2+a^2})} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) +$

$+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$. $y'' = (\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

$dy = y'\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\,dx.$ $d^2y = y''\,dx^2 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx^2$.

2. Найти производную третьего порядка функции $y = (2x+1)\sqrt[3]{2x+1}$.

Решение. $y = (2x+1)\sqrt[3]{2x+1} = (2x+1)^{\frac{4}{3}}$. $y' = \dfrac{4}{3}(2x+1)^{\frac{1}{3}}\cdot 2 = \dfrac{4}{3}(2x+1)^{\frac{1}{3}} =$

$= \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{2x+1}$. $y'' = \dfrac{4}{9}(2x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2 = \dfrac{8}{9}(2x+1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{8}{9\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

$y''' = -\dfrac{16}{27}(2x+1)^{-\frac{5}{3}}\cdot 2 = -\dfrac{32}{27}(2x+1)^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{32}{27(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

3. Найти производную n-го порядка функции $y = 5 - 3\cos^2 x$

Решение. $y' = 6\cos x\cdot\sin x = 3\sin 2x$; $y'' = 6\cos 2x = 3\cdot 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

.

$y''' = -3\cdot 2^2\sin 2x = 3\cdot 2^2\sin\left(2x + 2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$; $y^{IV} = -3\cdot 2^3\cos 2x =$

$= 3\cdot 2^3\sin\left(2x+3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\ldots$ $y^{(n)} = 3\cdot 2^{n-1}\sin\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Задачи.

Найти производные второго порядка.

1. $y=\cos^2 2x$. 2. $y = x\sqrt{1+x^2}$. 3. $y = (1+x^2)arctgx$. 4. $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5. $y = x\ln(\sin x)$. 6. $y = \dfrac{x^2+6x-5}{x^2+4x-3}$. 7. $y = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^2}$. 8. $y = \arcsin^2 3x$.

Найти производные высших порядков.

9. $y=\sin^2 x$; $y'''=?$ 10. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $f^{v}=?$ 11. $y=x^3\ln x$; $y^{(4)}=?$

12. $r=a\sin 2\varphi$; $\dfrac{d^4r}{d\varphi^4}=?$ 13. $y=\ln x$; $y^{(n)}=?$ 14. $y=x^2e^{-2x}$; $y^{(n)}=?$

Вычислить дифференциалы второго порядка.

15. $y=\cos^4 2x$. 16. $y=x\ln x$. 17. $y=e^{x^2}$. 18. $s=arcctg\ e^{-t}$. 19. $y=ctg3x$.

Дополнительные задачи.

20. Найти производную $n-$го порядка от функции $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

21. Убедиться, что функция $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ удовлетворяет соотношению

$$2y'^2=(y-1)y''.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 1, п. 6, 8.

Найти производные второго порядка.

22. $y=\sin^2 3x$. 23. $y=xe^{\sqrt{x}}$. 24. $y=2^x x^3$. 25. $y=\sqrt{1-x^2}\arccos x$.

26. $y=x^2\ln\cos x$. 27. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. 28. $y=x+\sqrt{1-x}$. 29. $y=\dfrac{x^3-x}{(1+x^3)^4}$.

Найти производные высших порядков.

30. $y=\cos^2 x$; $y'''=?$ 31. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$; $f^{(4)}=?$ 33. $y=x^4\lg x$; $y^{(3)}=?$

34. $r=a\cos 2\varphi$; $\dfrac{d^5r}{d\varphi^5}=?$ 35. $y=x^2\ln x$; $y^{(n)}=?$ 36. $y=xe^x$; $y^{(n)}=?$

Вычислить дифференциалы второго порядка.

37. $y=arctg2x$. 38. $y=x\sin x$. 39. $y=2^{\sin 2x}$. 40. $y=x(\ln x-1)$.

Занятие 29. Логарифмическая производная.

Логарифмическая производная:

$$\left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Производная показательно-степенной функции:

$$(u^v)'=vu^{v-1}u'+u^v\ln u\,v'.$$

Примеры. 1. Найти производную от показательно-степенной функции $y=(x^2+4)^{arctg2x}$.

Решение. Логарифмируем и находим производную:

$$\ln y = \ln(x^2+1/4)^{arctg\,2x} = arctg\,2x \cdot \ln(x^2+1/4).$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (arctg\,2x)' \cdot \ln(x^2+1/4) + arctg\,2x \cdot (\ln(x^2+1/4))' =$$

$$+ arctg\,2x \cdot (\ln(x^2+1/4))' = \frac{2\ln(x^2+4)}{1+4x^2} + \frac{2x\,arctg\,2x}{x^2+1/4}.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2[\ln(x^2+1/4)+4x\,arctg\,2x]}{1+4x^2}, \quad y' = y \cdot \frac{2[\ln(x^2+1/4)+4x\,arctg\,2x]}{1+4x^2} =$$

$$= (x^2+4)^{arctg\,2x} \cdot \frac{2[\ln(x^2+1/4)+4x\,arctg\,2x]}{1+4x^2}.$$

2. Найти производную функции с помощью логарифмирования:т

$$y = \frac{(x^3+3)^3\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt[4]{(x-3x^2)^3}}.$$

Решение. Логарифмируем и находим производную:

$$\ln y = \ln\frac{(x^3+3)^3\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt[4]{(x-3x^2)^3}} = \ln(x^3+3)^3 + \ln\sqrt[3]{2x-1} - \ln\sqrt[4]{(x-3x^2)^3} = 3\ln(x^3+3) +$$

$$+\frac{1}{3}\ln(2x-1) - \frac{3}{4}\ln x - \frac{3}{4}\ln(1-3x). \quad \frac{y'}{y} = \frac{9x^2}{x^3+3} + \frac{2}{3(2x-1)} - \frac{3}{4x} + \frac{9}{4(1-3x)}.$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{9x^2}{x^3+3} + \frac{2}{3(2x-1)} - \frac{3}{4x} + \frac{9}{4(1-3x)}\right) =$$

$$= \frac{(x^3+3)^3\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt[4]{(x-3x^2)^3}} \cdot \left(\frac{9x^2}{x^3+3} + \frac{2}{3(2x-1)} - \frac{3}{4x} + \frac{9}{4(1-3x)}\right).$$

Задачи.

Найти производные от показательно-степенных функций.

1. $y = x^x$. 2. $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$. 3. $y = \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^{x^2}$. 4. $y = \left(\sqrt{x+2}\right)^{\sin 2x}$. 5. $y = \left(tg\,xe^x\right)^{\sqrt{x}}$.

6. $y = \left(arctg\,x^2\right)^{\sqrt{x^2+1}}$. 7. $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. 8. $y = x^{\frac{1}{1-x}}$. 9. $y = (\sin 6x + 13x^2)^{\cos^2 5x}$.

Найти производные функций с помощью логарифмирования.

10. $y = \dfrac{(x-1)^4(x+1)^5}{\left(x^2+2\right)^7(x-5)^4}$. 11. $y = x^3e^{x^2}\sin 2x$. 12. $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

13. $y=\left(x^2+1\right)^3(x+2)^{10}(2x-5)^8(6x-7)^{11}$. 14. $y=\dfrac{x^2e^x arcctgx}{\ln^3 x}$.

15. $y=\dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$. 16. $y=e^{x^2-7x+3}\dfrac{\ln(16+\sin 4x)\arcsin x^3}{2^{4ctgx}}$.

Дополнительные задачи.

Найти производные функций с помощью логарифмирования.

17. $y=x^{x^x}$. . 19. $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 1, п. 1.

1. Найти производные функций с помощью логарифмирования.

20. $y=x^{x^a}$. 21. $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$. 22. $y=x^{a^x}$. 23. $y=\left(a^x\right)^x$. 24. $y=\left(\sqrt[4]{x}\right)^{\cos 4x}$.

25. $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{e^{x^2}}$. 26. $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$. 27. $y=\dfrac{(x-1)^4(x+1)^5}{\left(x^2+2\right)^7(x-5)^4}$.

28. $y=x^4 2^{x^2}\cos 2x$. 29. $y=\dfrac{(x+2)^5\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}$. 30. $y=\dfrac{xe^x arctgx}{\ln^5 x}$.

Занятие 30. Производная неявной функции.

Если функция $y=f(x)$ задается соотношением $F(x,y)=0$, то говорят, что она **задана неявно.** При нахождении производной функции $F(x,y)$ необходимо помнить, что y является функцией аргумента x. Например, $\left(x^2y\right)'=2xy+x^2y'$. Достаточно 1). вычислить производную по x от левой части уравнения $F(x,y)=0$, считая y функцией от x; 2). приравнять эту производную нулю; 3). решить полученное уравнение относительно производной y'.

Примеры. 1. Найти производную от функции, заданной неявно:

$$e^x-e^{-y}-2xy=2$$

Решение. $F(x,y)=e^x-e^{-y}-2xy-2=0$; $F'_x(x,y)=e^x-e^{-y}\cdot(-y')-2y-$ $-2xy'=0$; $e^{-y}\cdot y'-2xy'=2y-e^x$; $(e^{-y}-2x)y'=2y-e^x$; $y'=\dfrac{2y-e^x}{e^{-y}-2x}$.

2. Найти производную второго порядка функции $x^2+y^2=xy$.

Решение. $F(x,y)=$ $x^2+y^2-xy=0$. $F'_x(x,y)=2x+2yy'-y-xy'=0$;

$$(2y-x)y'=y-2x;\quad y'=\frac{y-2x}{2y-x};\quad y''=\frac{(y'-2)(2y-x)-(y-2x)(2y'-1)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{y-2x}{2y-x}-2\right)(2y-x)-(y-2x)\left(\frac{y-2x}{2y-x}-1\right)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{-3y\,(2y-x)+(y-2x)(y+x)}{(2y-x)^3}==\frac{-6y^2+3xy+y^2-xy-2x^2}{(2y-x)^3};$$

$$y''=\frac{-5y^2+2xy-2x^2}{(2y-x)^3}.$$

Задачи.

Найти производные от функций, заданных неявно.

1. $x^3+3x^2y+3xy+y^3-8=0$. 2. $2^x+2^y=2^{x+y}$. 3. $\ln x^2y=ctg\,(y+xy)$.

4. $x^3+y^3-3axy=0$. 5. $arcctg\,\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. 6. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$. 7. $\ln x-e^{-\frac{y}{x}}=c$.

8. $2y^3=2x^2+arctg\;xy$. 9. $e^y-e^{-y}-2xy=0$. 10. $y^2+xy+\sin y=1$.

Найти производные второго порядка.

11. $y^2=\cos(x+y)$. 12. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3}$. 13. $y+x=\ln xy$. 14. $x^3-y^3=x^2y^2$.

Дополнительные задачи.

15. Найти производную неявной функции $x^y=y^x$.

16. Найти $y''(0)$, если $e^y+xy=e$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 1, п. 2.

Найти производные от функций, заданных неявно.

17. $x^2+y^2-2axy=0$. 18. $x^3+2x^2y+3xy^2+y^3-5=0$. 19. $tg\sqrt{xy}=x^3e^y$.

20. $\sqrt[3]{xy}=e^{x+y^2}$. 21. $arctg\,\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. 22. $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$.

23. $y^2\sin x=a^2\cos^3(x^2y)$. 24. $xy+\frac{x}{y}=\ln y$. 25. $e^y=x+y$.

Найти производные второго порядка.

26. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3}$. 27. $y+x=\ln(xy)$. 28. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Занятие 31. Производная параметрически заданной функции.

Параметрически заданная функция $y = f(x)$:

$$x = x(t),\ y = y(t).$$

Ее **производная:**

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

Вторая производная параметрически заданной функции:

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

Примеры. 1. Найти производную от параметрически заданной функции:

$$x = \cos^2 4t,\ y = \sin^2 4t.$$

Решение. $x'_t = 2\cos 4t \cdot (-\sin 4t) \cdot 4 = -4\sin 8t$; $y'_t = 2\sin 4t \cdot \cos 4t \cdot 4 = 4\sin 8t$;

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{4\sin 8t}{4\sin 8t} = -1.$$

2. Найти производные второго порядка функции $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t.$

Решение. $x'_t = -3\sin t$; $y'_t = 3\cos t$; $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{3\cos t}{3\sin t} = -ctgt$.

$$(y'_x)'_t = (-ctgt)'_t = \frac{1}{\sin^2 t};\quad y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{-3\sin t} = -\frac{1}{3\sin^3 t}.$$

Задачи.

Найти производные от функций, заданных параметрически.

1. $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t.$ 2. $x = \frac{1}{3}\sin^3 t,\ y = \frac{1}{3}\cos^3 t.$

3. $x = 2\ln ctgt + 1,\ y = tgt + ctgt$. 4. $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$. 5. $x = \sqrt[3]{t^2}$, $y = \sqrt[4]{t^3}$.

6. $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$. 7. $x = t^2(1-\sin t)$, $y = t\cos t$.

Найти производные второго порядка.

8. $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. 9. $x = 2^{-2t}$, $y = 2^{2t}$. 10. $x = e^{2t}\cos t$, $y = e^{2t}\sin t$.

11. $x = t(1-\sin t)$, $y = t^2\cos t$. 12. $x = \ln(1+x^2)$, $y = t^2$.

Дополнительные задачи.

Из уравнений, параметрически задающих функцию, исключить параметр.

13. $x = 3t$, $y = 6t - t^2$. 14. $x = \cos t$, $y = \sin 2t$.

15. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $x=3\cos t$, $y=4\sin t$ в точке $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};2\sqrt{2}\right)$.

16. Убедиться, что параметрически заданная функция $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ удовлетворяет соотношению $36y''\left(1-\sqrt{3x}\right)=x+3$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 1, п. 3.

Найти производные от функций, заданных параметрически.

17. $x=\ln\left(1+t^2\right)$, $y=arcctgt$. 18. $x=\ln\cos t$, $y=t^2\sin t$. 19. $x=\sin t+\cos t$, $y=a^t+a^{-t}$. 20. $x=\left(\frac{2}{3}\sqrt{t+1}\right)t$, $y=\sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}}$. 21. $x=e^{-t}\sin^2 t$, $y=e^t\cos^2 t$.

22. $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. 23. $x=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$.

Найти производные второго порядка.

24. $x=\ln t$, $y=t^2-1$. 25. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt{t}}$. 26. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

27. $x=a(\varphi-\cos\varphi)$, $y=a(1-\sin\varphi)$. 28. $x=arctg\,t$, $y=\frac{1}{2}t^2$.

Занятие 32. Правило Лопиталя.

Если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой **неопределенность** $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$, и существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестностях точки a, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если производные $f'(x), g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции, то возможно повторное применение правила:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)},\ \text{и т.д.}$$

Все остальные неопределенности необходимо преобразовывать к неопределенностям $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Примеры. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-x^3}{e^x\sin 2x-2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x^2-x^3)'}{(e^x\sin 2x-2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-3x^2}{e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x-2}=$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(6x-3x^2)'}{(e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x-2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6x}{e^x\sin 2x+4e^x\cos 2x-4e^x\sin 2x}=$$

$$=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+3}{2x^2+3x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+2x+3)'}{(2x^2+3x-5)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+2}{4x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(8x+2)'}{(4x+3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{4}=2.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x^2\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x\sin x+x^2\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(2x\sin x+x^2\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x}=-\frac{1}{6}.$$

4. $$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

5. $$\lim_{x\to 0}x^x=(0^0)=\lim_{x\to 0}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0}e^{x\ln x}=\exp\,(\lim_{x\to 0}x\ln x).$$

В показателе экспоненты неопределенность $(0\cdot\infty)$, которую приводим к неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и к ней применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}x^x=\exp\,(\lim_{x\to 0}x\ln x)=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}(-x)=e^0=1.$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{1/x^2}=(1^\infty)=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-1}{x^2}$. В показателе экспоненты неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, к которой применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{1/x^2}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{x^2}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)'}{(x^2)'}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\frac{x}{2}}{4x}=$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)'}{(4x)'}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{-\cos\frac{x}{2}}{8}=\exp\left(-\frac{1}{8}\right)=e^{-1/8}.$$

Задачи.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg\,5x}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1+2x}{x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x-\sin x}$. 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+5}}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$. 10. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. 12 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tgx)^{2\cos x}$. 13. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Дополнительные задачи.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right]$. 17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x\right)$. 18. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$.

19. Пусть $x\to 0$. Доказать, что $\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)$ – бесконечно малая второго порядка относительно *x*.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 2, п. 2.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$. 21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$. 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. 23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctg\,x}{x-\arcsin x}$. 25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 2x-12x}{x^3}$. 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$. 27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 4x}-\frac{1}{4\sin^2 2x}\right)$. 29. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$. 30. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$. 31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. 33. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$. 34. $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2arctgx)\ln x]$. 35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{a}{x}\right)$.

Занятие 33. Монотонность функции. Экстремумы.

Монотонность. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале $(a;b)$, если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

Признак монотонности функции. Функция возрастает (убывает) на $(a;b)$, если

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0) \text{ на } (a;b).$$

Экстремум функции. Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума (минимума) функции* $f(x)$, если для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, выполняется неравенство

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)).$$

Точки, подозрительные на экстремум, находятся из условий:

$$f'(x) = 0, \quad f'(x) \text{ не существует}$$

(необходимое условие существования экстремума).

1 достаточное условие существования экстремума. Если при переходе через точку, подозрительную на экстремум, производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в этой точке существует максимум (минимум) функции.

2 достаточное условие существования экстремума. Если в критической точке x_0 вторая производная функции

$$f''(x_0) < 0 \quad (f''(x_0) > 0),$$

то в этой точке существует максимум (минимум) функции.

Пример. Найти промежутки монотонности и исследовать функцию на экстремум: $y = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 8$.

Решение. Область определения функции – вся числовая ось. $y' = 5x^4 + 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 + 4x + 3) = 5x^2(x+1)(x+3)$. Из равенства $y' = 0$ находим точки, подозрительные на экстремум: $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$. Эти точки делят область определения на 4 интервала: $(-\infty,-3)$, $(-3,-1)$, $(-1,0)$, $(0,\infty)$. В каждой точке каждого интервала производная имеет один и тот же знак. Строим таблицу.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\uparrow$	19	$\downarrow$	-9	$\uparrow$	-8	$\uparrow$
		max		min		Нет экстрем.	

На интервалах $(-\infty,-3)$, $(-1,0)$, $(0,\infty)$ функция возрастает, на интервале $(-3,-1)$ – убывает. В точке $x=-3$ функция имеет максимум, $y_{\max}=y(-3)=$ В точке $x=-1$ функция имеет минимум $y_{\min}=y(-1)=-9$.

Задачи.

Найти промежутки монотонности и исследовать функции на экстремум.

1. $y=x^3-3x^2+3x+2$. 2. $y=x^2(x-12)^2$. 3. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$. 4. $y=(2-x)\sqrt[3]{x^2}$.

5. $y=e^{2x-x^2}$. 6. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$. 7. $y=\ln(9-x^2)$. 8. $y=\dfrac{x}{4x^2-3x+4}$.

Дополнительные задачи.

9. Показать, что функция $y=arctgx-x$ везде убывает.

10. Найти экстремум функции $y=\dfrac{1}{2}\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)\arcsin x+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{\pi}{12}x^2$.

11. Найти промежутки монотонности и исследовать функцию на экстремум: $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 2, п. 3.

Найти промежутки монотонности и исследовать функции на экстремум.

12. $y=2x^3+3x^2-12x+5$. 13. $y=(x-1)^2(x-2)^2$. 14. $y=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

15. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. 16. $y=(x-1)e^{3x+1}$. 17. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$. 18. $y=\ln(x^2+1)$.

Занятие 34. Выпуклость графика функции. Асимптоты.

График функции $f(x)$ называется *выпуклым вверх* (*вниз*) на $(a;b)$, график лежит ниже (выше) любой касательной, проведенной к графику в любой точке этого интервала.

Выпуклость вверх (вниз) на (a,b), если на (a,b)

$$f''(x) < 0 \ (f''(x) > 0).$$

Точкой перегиба называется точка, в которой функция меняет направлене выпуклости.

Точки, подозрительные на перегиб, находятся из условий:

$$f''(x) = 0, \ \ f''(x) \text{ не существует.}$$

Достаточное условие существования перегиба. Если при переходе через точку, подозрительную на перегиб, вторая производная меняет знак, то в этой точке перегиб – изменение направления выпуклости функции – существует.

Прямая L называется *асимптотой* кривой $f(x)$, если расстояние точки $M(x;y)$ кривой от прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$$

и (или)

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty .$$

Наклонные асимптоты графика функции $f(x)$:

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \ b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx).$$

Горизонтальная асимптота при $k = 0$:

$$y = b.$$

Примеры. 1. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба: $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 9$.

Решение. Область определения функции – вся числовая ось. Найдем вторую производную: $y' = 4x^3 - 12x + 5$, $y'' = 12x^2 - 12$; точки, подозрительные на перегиб, определяются из уравнения $y'' = 0$: $x = 1$, $x = -1$. Эти точки делят область определения на три интервала постоянства знака второй производной: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$. Строим таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(-1;\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	-19	$\cap$	-9	$\cup$
		Точка перегиба		Точка перегиба	

На интервалах $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ функция выпукла вниз, на интервале $(-1,1)$ функция выпукла вверх. Точки $(-1,-19)$ и $(1,-9)-$ точки перегиба.

2. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{3x^2-2x+5}{x+1}$.

Решение. Вертикальная асимптота $x=-1$ проходит через точку, в которой функция обращается в бесконечность. Наклонная асимптота $y=kx+b$. Ищем k:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y\,(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{x(x+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-2x+5):x^2}{x(x+1):x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=3.\quad b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x+5}{x+1}-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+5}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+5):x}{(x+1):x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-5.$$

$y=3x-5-$ наклонная асимптота.

Асимптоту можно найти и выделением целой части из неправильной дроби:

$$y=\frac{3x^2-2x+5}{x+1}=\frac{3x^2+3x-3x-2x+5}{x+1}=\frac{3x(x+1)-5(x+1)+10}{x+1}=$$

$=3x-5+\dfrac{10}{x+1}$; $\dfrac{10}{x+1}\to 0$ при $x\to\infty$, тогда $y\to 3x-5$. Следовательно, $y=3x-5-$ наклонная асимптота.

Задачи.

Найти промежутки выпуклости графиков функций и точки перегиба.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$. 2. $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$. 3. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. $y = x\,arctgx$. 5. $y = (2-x)e^{2x}$. 6. $y = 2x^2 + \ln x$. 7. $y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.

Найти асимптоты графиков следующих функций.

8. $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. 9. $y = \dfrac{x^2+5}{x^2-1} + 2x$. 10. $y = \dfrac{x+5}{x-3}$. 11. $y = 2x + arctgx$.

12. $y = xe^{1/x}$. 13. $y = \sqrt{x^2-4}$. 14. $y = \dfrac{1}{1-e^x}$. 15. $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$. 16. $y = e^{-x^2} + 2$.

Дополнительные задачи.

17. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба: $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

18. Проверить, что прямая $x + y = 0$ есть асимптота линии $x^2y + xy^2 = 1$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 2, п. 4, 5.

Найти промежутки выпуклости графиков функций и точки перегиба.

19. $y = x^3 + 6x^2 - 7x + 8$. 20. $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 9$. 21. $y = \dfrac{x^3}{12+x^2}$. 22. $y = x^2 \ln x$.

23. $y = arctgx - x$. 24. $y = (1+x^2)e^x$. 25. $y = (x-4)^5 + 4x + 4$. 26. $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Найти асимптоты графиков следующих функций.

27. $y = \dfrac{2x^2-9}{x+2}$. 28. $y = xe^x$. 29. $y = \dfrac{3x^3+5}{x^3-1}$. 30. $y = \dfrac{2x+3}{x+3}$. 31. $y = e^{-x} - 4$.

Занятие 35. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Исследование и построение графиков функций.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке находятся либо в точках, подозрительных на экстремум, принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка.

Порядок нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

- находим $y' = f'(x)$;
- приравниваем производную нулю и из уравнения $f'(x) = 0$ находим точки, подозрительные на экстремум;
- проверим принадлежность точек, подозрительных на экстремум, отрезку $[a;b]$;
- находим значения функции в точках, подозрительных на экстремум и

принадлежащих отрезку $[a;b]$, а также в точках $x = a$ и $x = b$;

- выбираем из полученных значений функции наибольшее и наименьшее значения $y_{наиб}$ и $y_{наим}$.

Схема исследования и построения графика функции.

1. Найти область определения функции, множество значений (по возможности), точки разрывов, вертикальные асимптоты.

2. Исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность.

Функция $y = y(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если $y(-x) = y(x)$ ($y(-x) = -y(x)$). График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции – относительно начала координат $O(0;0)$.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T, если $f(x+T) = f(x)$.

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

4. Исследовать функцию на монотонность, найти точки экстремума.

5. Найти точки перегиба, определить направление выпуклости графика функции.

6. Найти наклонные асимптоты графика функции.

7. Построить график функции.

Примеры. 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке: $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ на $[0,5;3]$.

Решение. $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0$; $3x^2 - 4x + 1 = 0$; $D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$; $\sqrt{D} = 2$;

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{6}$; $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$. $x_1 = 1 \in [0,5;3]$, $x_2 = \dfrac{1}{3} \notin [0,5;3]$.

$y(0,5) = 0{,}125 - 0{,}5 + 0{,}5 - 2 = -1{,}875$; $y(1) = 1 - 2 + 1 - 2 = -2$;

$y(3) = 27 - 18 + 3 - 2 = 10$. $y_{наиб} = y(3) = 10$; $y_{наим} = y(1) = -2$.

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3}{4 - x^2}.$$

1) ОДЗ: $x \neq \pm 2 \Rightarrow (-\infty; -2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$; $x = -2,\ x = 2$ – вертикальные асимптоты.

2) Четность, нечетность, периодичность функции: $x \to -x$:

$y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{4 - (-x)^2} = = -\dfrac{x^3}{4 - x^2} = -y(x)$. Функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат. Функция непериодическая.

3) Точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью Ox: $y=0 \Rightarrow x=0$; пересечение с осью Oy: $x=0 \Rightarrow y=0$. Точка пересечения $(0;0)$.

4) Исследование на возрастание и убывание и экстремумы:

$$y' = \frac{3x^2(4-x^2)-x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2-3x^4+2x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}.$$

Точки, подозрительные на экстремум: $y'=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm 2\sqrt{3}$; y' не существует: $x=\pm 2$. Эти точки разбивают числовую прямую на шесть интервалов постоянства знака первой производной. Строим таблицу, включая в нее только три интервала. Далее используем симметрию графика относительно начала координат.

x	$(-\infty;-2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3};-2)$	-2	$(-2;0)$	0
y'	–	0	+	Не сущест	+	0
y	$\downarrow$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow$	Не сущест	$\uparrow$	0
		min				

Таким образом, функция убывает на интервалах $(-\infty;-2\sqrt{3})$ и $(2;\infty)$, возрастает на интервалах $(-2\sqrt{3};-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;2\sqrt{3})$. В точке $x=-2\sqrt{3}$ – минимум, в точке $x=2\sqrt{3}$ – максимум.

5) Исследование на направления выпуклости и точки перегиба.

$$y'' = \frac{(24x-4x^3)(4-x^2)^2-(12x^2-x^4)2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(24x-4x^3)(4-x^2)+4x(12x^2-x^4)}{(4-x^2)^3} = \frac{96x-16x^3-24x^3+4x^5+48x^3-4x^5)}{(4-x^2)^3} =$$

$= \dfrac{96x+8x^3}{(4-x^2)^3} == \dfrac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}$.Точки, подозрительные на перегиб: $y''=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=0$; y'' не существует: $x=\pm 2$. Строим таблицу.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
y''	+	Не сущест	–	0	+	Не сущест	–
y	$\cup$	Не сущест	$\cap$	0	$\cup$	Не сущест	$\cap$
				Т. перег.			

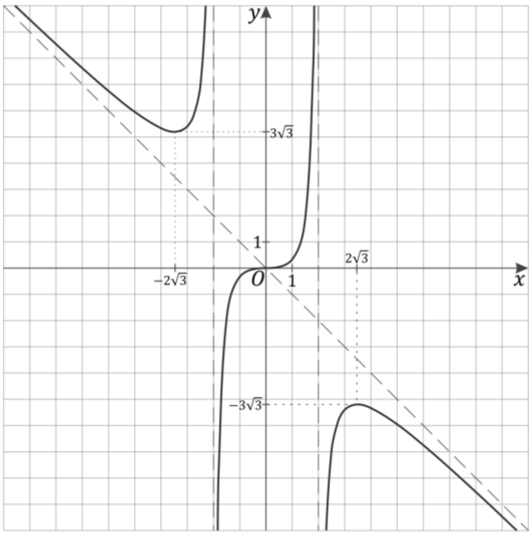
6) Наклонные асимптоты: $y = kx + b$; $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(4-x^2)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 : x^2}{(4-x^2) : x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^2} - 1} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x : x^2}{(4-x^2) : x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^2} - 1} = 0.$$ $y = -x$ – наклонная асимптота.

7) Построение графика функции. Вначале наносим асимптоты $x = \pm 2$, $y = -x$, затем характерные точки $x = 0, x = \pm 2\sqrt{3}$. Далее используем таблицы пп. 4 и 5.



Задачи.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке.

1. $y = 1{,}5x^2 + \dfrac{81}{x}$ на $[1;4]$. 2. $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на $[-1;3]$. 3. $y = 2\sin x + \cos 2x$ на $[0;2\pi]$.

Исследовать функцию и построить ее график.

4. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. 5. $y = (x-1)^2(x-2)^2$. 6. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$. 7. $y = x^2 e^{-x}$.

8. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$. 9. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$. 10. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Дополнительные задачи.

11. Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

12. Определить наибольшую площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в шар радиуса a.

Исследовать функцию и построить ее график.

13. $y = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$. 14. $y = e^{\sin x} - \sin x$ (без отыскания точек перегибов).

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 2, п. 3, 4, 5, 6.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке.

15. $y = x + \dfrac{1}{x+2}$ на $[-5; -2{,}5]$. 16. $y = x^3 - 18x^2 + 96x$ на $[5;9]$.

17. $y = 2\sin x + \sin 2x$ на $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

18. Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.

Исследовать функцию и построить график.

19. $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 8$. 20. $y = x^4 - 10x^2 + 9$. 21. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. 22. $y = \sqrt{x}e^{-x}$.

23. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$. 24. $y = x\sqrt{1-x}$. 25. $y = \ln(x^2-4)$.

Занятие 36. Исследование и построение графиков функций.

Схема исследования и построения графика функции.

1. Найти область определения функции, множество значений (по возможности), точки разрывов, вертикальные асимптоты.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Исследовать функцию на монотонность, найти точки экстремума.
5. Найти точки перегиба, определить направление выпуклости графика функции.
6. Найти наклонные асимптоты графика функции.
7. Построить график функции.

Задачи.

Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y = \ln\dfrac{x+6}{x} - 1$. 2. $y = (2x-1)e^{2x-1}$. 3. $y = x \cdot \sqrt[3]{(x-3)^2}$. 4. $y = x + 2arctgx$.

5. $y = \ln x - arctg\, x$. 6. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Дополнительные задачи.

Исследовать функцию и построить ее график.

7. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$. 8. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. VII, пар. 2, п. 6.

Исследовать функцию и построить ее график.

9. $y = (1-x) \cdot \sqrt[3]{x^2}$. 10. $y = x - 2arctgx$. 11. $y = x - \ln(x+1)$. 12. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

13. $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$. 14. $y = \ln(1 + x^2)$.