

Практика 2

Знакопеременные ряды. Свойства и признаки сходимости.

П.1. Знакопередающийся ряд. Признак Лейбница

Знакопередающийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots, \text{ где } u_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Признак Лейбница

Если у знакопередающегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$ абсолютные величины u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ и общий член стремится к нулю $u_n \rightarrow 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (2)$$

Теорема 1. Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует число N , такое, что при $n > N$ и любом целом $p > 0$ верно неравенство:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

П.2. Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет

абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет

абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

П.3. Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) **Теорема 2.** Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема 3.** При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1, 2, \dots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.