Задания по теме «Ряды»

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i ,$$

где – u_i члены ряда, u_n– *n-й* или общий член ряда, называется *бесконечным рядом.*

Если члены ряда:

- числа, то ряд называется *числовым*;
- числа одного знака, то ряд называется *знакопостоянным;*
- числа разных знаков, то ряд называется *знакопеременным*;
- положительные числа, то ряд называется *знакоположительным*;
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется *знакочередующимся*;
- функции, то ряд называется *функциональным*;
- степени *x*, то ряд называется *степенным*;
- тригонометрические функции, то ряд называется *тригонометрическим*.

1. Числовые ряды. Ряды с положительными членами

1.1. Основные понятия числового ряда

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

где u_i называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется *общим членом ряда*.

Суммы:

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1, \\
&S_2 = u_1 + u_2, \\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,
\end{aligned}$$

составленные из первых членов ряда (1), называются *частичными суммами этого ряда.*

Каждому ряду можно сопоставить *последовательность частичных сумм* $S_n \{S_n\}$.

Если при бесконечном возрастании номера *n* частичная сумма ряда S_n стремится к пределу *S*, то ряд называется *сходящимся*, а *число S – суммой сходящегося ряда*, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ и } \lim_{n\to\infty} S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = S.$$

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Если частичная сумма ряда (1) при неограниченном возрастании *n* не имеет конечного предела (стремится к $+\infty$ или $-\infty$), то такой ряд называется *расходящимся*.

Задание 1. Найти общий член числового ряда:

1) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+...$ 6) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+...$

2) $\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+...$ 7) $\frac{3}{2}+\frac{6}{4}+\frac{9}{8}+...$

3) $\frac{1}{4}+\frac{3!}{16}+\frac{5!}{64}+...$ 8) $\frac{2}{4!}+\frac{4}{7!}+\frac{6}{10!}+...$

4) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+...$ 9) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+...$

5) $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{8}+...$ 10) $\frac{1}{4}+\frac{3}{6}+\frac{9}{8}+...$

1.2 Необходимый признак сходимости ряда

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член при неограниченном увеличении номера *n* стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$**,** то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Задание 2. Проверить выполнение необходимого условия сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^3+1}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2+8}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n+1)}$ 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(12n+1)\ln^2(5n+1)}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(4n+1)}{2n+1}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n+1}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3+10}$ 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^5}{n^3+10}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12n}{4n-1}$ 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}$

1.3. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

Признаки сравнения рядов с положительными членами

1-й признак сравнения. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами, причём $a_n \le b_n$ для всех номеров *n*, начиная с некоторого. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

*2-й признак сравнения***.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ –ряды с положительными членами, причём существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Ряд Дирихле

Ряд $1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots$, где *p>0,* называется *рядом Дирихле*. Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \le 1$. Частным случаем ряда Дирихле (при $p = 1$) является гармонический ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$.

Задание 3. Исследовать на сходимость по признакам сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1001}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2+1}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4n^3+n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}+1}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4+10n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{4n^4+n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+1}$

Признак Даламбера. Если для ряда с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots (u_n > 0)$ выполняется

условие $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак Даламбера не даёт решения, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие признаки.

Задание 4. Исследовать на сходимость по признаку Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)!}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{3^n n!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n2^n}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{3^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n+1)}{4^n n!}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n n}$

Интегральный признак Коши. Пусть функция *f(x)* при $x \geq 1$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна,
2) положительна,
3) монотонно убывает.

Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n),\ n \geq 1$ сходится или расходится одновременно со сходимостью или расходимостью интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Задание 5. Исследовать на сходимость по интегральному признаку Коши следующие ряды:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+4}$

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ 9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$ 10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

Ответы:

Задание 1. 1) $\frac{n}{n+2}$, 2) $\frac{2n}{5^n}$, 3) $\frac{(2n-1)!}{4^n}$, 4), 5) $\frac{n}{2n+2}$, 6) $\frac{n}{n+3}$, 7) $\frac{3n}{2^n}$, 8) $\frac{2n}{(3n+1)!}$, 9) $\frac{2^{n+1}}{3n-1}$, 10) $\frac{3^{n-1}}{2n+2}$.

Задание 2. 1) да, 2) да, 3) да, 4) нет, 5) нет, 6) да, 7) да, 8) нет, 9) нет, 10) да.

Задание 3. 1)сходится , 2) расходится, 3) расходится, 4) расходится, 5) сходится, 6) сходится, 7) расходится, 8) расходится, 9) сходится, 10) сходится.

Задание 4. 1) расходится, 2) сходится, 3) сходится, 4) сходится, 5) сходится, 6) сходится, 7) сходится, 8) расходится, 9) сходится, 10) расходится.

Задание 5. 1) расходится, 2) сходится, 3) сходится, 4) расходится, 5) сходится, 6) расходится, 7) сходится, 8) расходится, 9) расходится, 10) расходится.