Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей.

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, где Ω – множество элементарных исходов эксперимента, F – σ–алгебра событий, P – вероятностная мера. Пусть $B \in F$ – некоторое событие, вероятность которого $p(B) > 0$.

Определение. Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B называют число $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0. \tag{2.1}$$

Определение. События A и B называются независимыми, если выполняется равенство $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Теорема. События A и B независимы тогда и только тогда, когда справедливо соотношение $P(A|B) = P(A)$, при $P(B) > 0$.

Теорема (умножения вероятностей). Пусть $A, B \in F$ –события вероятностного пространства, причем $P(B) > 0$. Тогда

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{2.2}$$

Пусть $A_1, A_2, A_3 \in F$ –события вероятностного пространства, причем $P(A_1) > 0$ и $P(A_1 \cap A_2) > 0$. Тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2). \tag{2.3}$$

Теорема (сложения вероятностей). Пусть $A, B \in F$ –события вероятностного пространства. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.4}$$

2.1. Операции над событиями. Независимость событий

1. Опыт состоит в подбрасывании двух монет. Рассматриваются следующие события:
   - A - появление герба на первой монете;
   - B - появление цифры на первой монете;
   - C - появление герба на второй монете;
   - D - появление цифры на второй монете;
   - E - появление хотя бы одного герба;
   - F - появление хотя бы одной цифры;
   - G - появление одного герба и одной цифры;
   - H - непоявление ни одного герба;
   - K - появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $E \cap F$; 4) $G \cup F$; 5) $G \cap F$; 6) $B \cap D$; 7) $E \cup K$.

2. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i- попадание при i -м выстреле ($i = 1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события:
   A - все три попадания;
   B - все три промаха;
   C - хотя бы одно попадание;
   D - хотя бы один промах;
   E - не меньше двух попаданий;
   F - не больше одного попадания;
   G - попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.
3. Опыт состоит в последовательном подбрасывании двух монет. Рассматриваются события:
   A - появление герба на первой монете;
   D - появление хотя бы одного герба;
   E - появление хотя бы одной цифры;
   F - появление герба на второй монете.

Определить, зависимы или независимы пары событий:
1) A и E; 2) A и F; 3) D и E; 4) D и F.
Определить условные и безусловные вероятности событий в каждой паре.

4. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события:
   A - появление туза;
   B - появление карты красной масти;
   C - появление бубнового туза;
   D - появление десятки.

   Зависимы или независимы попарно следующие события:
1) A и B; 2) A и C; 3) B и C; 4) B и D; 5) C и D.

2.2. Условная вероятность

1. Студент пришел на экзамен, зная 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что он ответит на три последовательно заданных ему вопроса.
2. В общежитии проживает 10% студентов университета. 75% студентов, проживающих в общежитии, увлекается спортом, среди них 46% юношей. Какова вероятность встретить в студенческом городке юношу, увлекающегося спортом и живущего в общежитии?
3. У человека имеется N ключей, из которых только один подходит к двери. Он последовательно испытывает их. Процесс испытания может

закончиться при 1, 2, …., N испытаниях. Показать, что каждый из этих исходов имеет вероятность 1/N.

2.3. Теоремы умножения и сложения вероятностей

1. Два охотника пошли на охоту, увидели медведя и одновременно выстрелили. Медведь убит, но в шкуре одна дыра, то есть попал только один из охотников. У первого вероятность попадания 0.8, у второго – 0.4. Шкуру продали за 70 рублей. Как поделить деньги между охотниками?
2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго — 0.8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.
3. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0.973. Какова вероятность попадания при одном выстреле?
4. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали 1-й и 2-й элементы, если вероятности отказов соответственно равны p_1=0.2, p_2=0.4, p_3=0.3.

2.3. Задачи для самостоятельной работы

1. В отделе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам отобраны три человека. Какова вероятность того, что отобранные лица окажутся мужчинами?
2. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 1% каблуков, 4% подметок и 5% верхов. Каблуки, верхи и подметки случайно комбинируются в цехе, где шьют ботинки. Какой процент ботинок будет испорчен?
3. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0.8, вторым стрелком – 0.7, третьим стрелком – 0.6. Найти вероятность поражения цели: а) двумя пулями; б) не менее чем двумя пулями.
4. В урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8, 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одинакового цвета?