Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей.

Задача 1.
В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

Решение:
Событие А={вынуты пуговицы одного цвета} можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события A_1 и A_2 означают выбор пуговиц красного и синего цвета соответственно. Вероятность вытащить две красные пуговицы равна $P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$, а вероятность вытащить две синие пуговицы $P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2}$. Так как события A_1 и A_2 не могут произойти одновременно, то в силу теоремы сложения

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{10!}{2!8!} + \frac{5!}{2!3!}}{\frac{15!}{2!13!}} = 0{,}524.$$

Задача 2.
Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий, 42% – французский; английский и немецкий – 8%, английский и французский – 10%, немецкий и французский – 5%, все три языка – 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы: а) знает английский или немецкий; б) знает английский, немецкий или французский; в) не знает ни один из перечисленных языков.

Решение:
Обозначим через А, В и С события, заключающиеся в том, что случайно выбранный сотрудник фирмы владеет английским, немецким или французским соответственно. Очевидно, доли сотрудников фирмы, владеющих теми или иными языками, определяют вероятности этих событий. Получаем:

а) $P(A \cup B)=P(A)+P(B) - P(AB)=0{,}28+0{,}3-0{,}08=0{,}5$;

б)
$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-(P(AB)+P(AC)+P(BC))+P(ABC)=0{,}28+0{,}3+0{,}42-$
$-(0{,}08+0{,}1+0{,}05)+0{,}03=0{,}8$;

в) $1-P(A \cup B \cup C)=0{,}2$.

Задача 3.
В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – мальчик, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

Решение:
Пусть А={старший ребенок – мальчик}, В={в семье есть дети обоего пола}. Будем считать, что рождение мальчика и рождение девочки – равновероятные события. Если рождение мальчика обозначить буквой М, а рождение девочки – Д, то пространство всех элементарных исходов состоит из четырех пар: $\Omega = \{ММ, МД, ДМ, ДД\}$. В этом пространстве лишь два исхода (МД и ДМ) отвечают событию В. Событие АВ означает, что в семье есть дети обоего пола. Старший ребенок – мальчик, следовательно, второй (младший) ребенок – девочка. Этому событию АВ отвечает один исход – МД. Таким образом, |АВ|=1, |В|=2 и

$$P(A \mid B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Задача 4.
Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

Решение:
Событие А={мастер проверил ровно две детали} означает, что при такой проверке первая деталь оказалась нестандартной, а вторая – стандартная. Значит, $A = A_1 A_2$, где A_1 ={ первая деталь оказалась нестандартной } и A_2 ={вторая деталь – стандартная}. Очевидно, что вероятность события A_1 равна $P(A_1) = 3/10,$ кроме того, $P(A_2 \mid A_1) = 7/9$, так как перед взятием второй детали у мастера осталось 9 деталей, из которых только 2 нестандартные и 7 стандартных. По теореме умножения

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 7/30.$$

Задача 5. В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

Решение:
Событие А={хотя бы из одного ящика вынут белый шар} можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события A_1 и A_2 означают появление белого шара из первого и второго ящика соответственно. Вероятность вытащить белый шар из первого ящика равна $P(A_1) = 3/8$, а вероятность вытащить белый шар из второго ящика $P(A_2) = 6/10$. Кроме того, в силу независимости A_1 и A_2

имеем: $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{10}=\frac{9}{40}$. По теореме сложения получаем: $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=3/8+6/10-9/40=3/4$.

Задача 6.

Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

Решение:

Обозначим через H_1,H_2,H_3 гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи

$$P(H_1)=6/30=0{,}2,\ \ P(H_2)=3/30=0{,}1,\ \ P(H_3)=21/30=0{,}7.$$

Пусть событие A={слабо подготовившийся студент сдал экзамен}. Тогда снова в силу условия задачи

$$P(A\,|\,H_1)=0{,}4,\qquad P(A\,|\,H_2)=0{,}1,\qquad P(A\,|\,H_3)=0{,}7.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}58.$$

Задача *7*.

Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B, C. На долю фирмы A приходится 50% общего объема поставок, B – 30% и C – 20%. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой A деталей 10% бракованных, фирмой B – 5% и фирмой C – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

Решение:

Пусть событие G – появление годной детали. Вероятности гипотез о том, что деталь поставлена фирмами A, B, C, равны соответственно P(A)=0,5, P(B)=0,3, P(C)=0,2. Условные вероятности появления при этом годной детали равны P(G|A)=0,9, P(G|B)=0,95, P(G|C)=0,94 (как вероятности противоположных событий к появлению бракованной). По формуле полной вероятности получаем:

$$P(G)=0{,}5\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}95+0{,}2\cdot 0{,}94=0{,}923.$$

Задача 8 **(см. задачу 6).** Пусть известно, что студент не сдал экзамен, т.е. получил оценку «неудовлетворительно». Кому из трех преподавателей вероятнее всего он отвечал?

Решение:

Вероятность получить «неуд» равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$. Требуется вычислить условные вероятности. По формулам Байеса получаем:

$P(H_1 \mid \overline{A}) = \dfrac{P(H_1) \cdot P(\overline{A} \mid H_1)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}42} = 0{,}285$, и аналогично,

$P(H_2 \mid \overline{A}) = \dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}42} = 0{,}214$, $P(H_3 \mid \overline{A}) = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}42} = 0{,}5$.

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.