

Схема независимых испытаний Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Рассмотрим некоторый стохастический эксперимент, который будем называть испытанием. Среди исходов этого испытания будем различать только два события A и \bar{A} , $A \cap \bar{A} = \Omega$. Если испытание заканчивается появлением события A , будем говорить, что наступил «успех», если же испытание заканчивается появлением события \bar{A} , то говорим, что наступил «неуспех». Обозначим вероятность «успеха» $P(A) = p$, вероятность «неуспеха» $P(\bar{A}) = q$. Очевидно, что $p + q = 1$.

Теперь рассмотрим эксперимент, состоящий в том, что проводится n независимых испытаний. Вероятность успеха не изменяется в зависимости от номера испытания.

Такая схема проведения эксперимента называется схемой независимых испытаний Бернулли.

Рассмотрим случайную величину ξ – «количество успехов в n независимых испытаниях Бернулли». Множеством значений этой величины будет множество $\{0, 1, \dots, n\}$. Обозначим вероятность того, что в n испытаниях появится ровно k «успехов» как $P_n(k) = P\{\xi = k\}$. Имеет место формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1)$$

Теорема (Пуассон).

Если последовательность положительных чисел p_n такова, что $np \rightarrow \lambda < \infty$

при $n \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $q_n = 1 - p_n$.

Из теоремы Пуассона следует, что если n велико и p мало, то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np. \quad (2)$$

Значения $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ приведены в приложении 3.

Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Если вероятность «успеха» p , $0 < p < 1$, при одном испытании в n независимых испытаниях Бернулли не зависит от числа испытаний n , то для $0 \leq k \leq n$,

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (3)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в приложении 2.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Если вероятность «успеха» p , $0 < p < 1$, при одном испытании в n независимых испытаниях Бернулли не зависит от числа испытаний n , то для любых целых $0 \leq k_1 < k_2 \leq n$

$$P_n(k_1 \leq k < k_2) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \quad (3)$$

где $b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ приведены в приложении 1.

Теорема (Бернулли). Пусть вероятность «успеха» p , $0 < p < 1$, при одном испытании в n независимых испытаниях Бернулли не зависит от числа испытаний n .

При достаточно большом n для любого k , $0 \leq k \leq n$ и любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (4)$$

Отношение $\mu_n(A) = \frac{k}{n}$ называется относительной частотой появления события A , (т.е. «успеха») при n независимых испытаниях.

Замечание. Теорема Пуассона используется обычно при $p \leq 0.1$ и $npq \leq 9$. В случае, когда $npq > 9$, используют предельные теоремы Муавра-Лапласа (см.: Хельд А. Математическая статистика. М., ил. 1956. С. 585).

1.1. Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли

1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?
2. Вероятность некоторого изделия быть бракованным равна 0.005. Чему равна вероятность того, что среди 10000 наугад взятых изделий 40 бракованных?

3. Среди семян пшеницы 0.6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 обнаружить: а) не менее 3 семян сорняков; б) не более 16 семян сорняков; в) ровно 6 семян сорняков?
4. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0.8 рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?
5. Вероятность появления некоторого события при одном опыте равна 0.3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0.2 до 0.4.
6. При бросании монеты 4040 раз (опыт Бюффона), герб выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона частота появления герба отклонится по абсолютной величине от вероятности появления герба при одном испытании не более чем в опыте Бюффона.
7. Среди семян пшеницы 0.9% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе тысячи семян обнаружить а) ровно 6 сорняков; б) не менее 6 и не более 15 сорняков?
8. Какова вероятность того, что при ста подбрасываниях монеты «орел» выпадет: а) 45 раз; б) не менее 45 и более 60 раз?

1.2. Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть вероятность попадания в цель при одном выстреле равна $1/5$. Производится 10 независимых выстрелов. а) Какова вероятность попадания в цель по меньшей мере дважды? б) Какова условная вероятность попадания в цель по меньшей мере дважды, если известно, что по крайней мере одно попадание произошло?
2. Среди коконов некоторых партии 20% цветных. Какова вероятность того, что среди 100 случайно отобранных из партии коконов 15 цветных? Не более 30 и не менее 15 цветных?
3. Учебник набран тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0.0001. Найти вероятность того, что тираж содержит: 1) ровно 5 бракованных книг; 2) менее 3-х бракованных книг; 3) хотя бы одну бракованную книгу; 4) более 2-х бракованных книг.
4. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0.8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что мишень будет поражена не менее 75 раз?
5. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число выпадений «шестерки».
6. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. найти с

вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено количество бракованных изделий среди проверенных.

7. В первые классы должны быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ Приложение 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,60	0,2257	1,20	0,3849	1,80	0,4641	2,40	0,4918	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,61	0,2291	1,21	0,3869	1,81	0,4649	2,41	0,4920	3,01	0,49869
0,02	0,0080	0,62	0,2324	1,22	0,3888	1,82	0,4656	2,42	0,4922	3,02	0,49874
0,03	0,0120	0,63	0,2357	1,23	0,3907	1,83	0,4664	2,43	0,4925	3,03	0,49878
0,04	0,0160	0,64	0,2389	1,24	0,3925	1,84	0,4671	2,44	0,4927	3,04	0,49882
0,05	0,0199	0,65	0,2422	1,25	0,3944	1,85	0,4678	2,45	0,4929	3,05	0,49886
0,06	0,0239	0,66	0,2454	1,26	0,3962	1,86	0,4686	2,46	0,4931	3,06	0,49889
0,07	0,0279	0,67	0,2486	1,27	0,3980	1,87	0,4693	2,47	0,4932	3,07	0,49893
0,08	0,0319	0,68	0,2517	1,28	0,3997	1,88	0,4699	2,48	0,4934	3,08	0,49896
0,09	0,0359	0,69	0,2549	1,29	0,4015	1,89	0,4706	2,49	0,4936	3,09	0,49900
0,10	0,0398	0,70	0,2580	1,30	0,4032	1,90	0,4713	2,50	0,4938	3,10	0,49903
0,11	0,0438	0,71	0,2611	1,31	0,4049	1,91	0,4719	2,51	0,4940	3,11	0,49906
0,12	0,0478	0,72	0,2642	1,32	0,4066	1,92	0,4726	2,52	0,4941	3,12	0,49910
0,13	0,0517	0,73	0,2673	1,33	0,4082	1,93	0,4732	2,53	0,4943	3,13	0,49913
0,14	0,0557	0,74	0,2704	1,34	0,4099	1,94	0,4738	2,54	0,4945	3,14	0,49916
0,15	0,0596	0,75	0,2734	1,35	0,4115	1,95	0,4744	2,55	0,4946	3,15	0,49918
0,16	0,0636	0,76	0,2764	1,36	0,4131	1,96	0,4750	2,56	0,4948	3,16	0,49921
0,17	0,0675	0,77	0,2794	1,37	0,4147	1,97	0,4756	2,57	0,4949	3,17	0,49924
0,18	0,0714	0,78	0,2823	1,38	0,4162	1,98	0,4761	2,58	0,4951	3,18	0,49926
0,19	0,0753	0,79	0,2852	1,39	0,4177	1,99	0,4767	2,59	0,4952	3,19	0,49929
0,20	0,0793	0,80	0,2881	1,40	0,4192	2,00	0,4772	2,60	0,4953	3,20	0,49931
0,21	0,0832	0,81	0,2910	1,41	0,4207	2,01	0,4778	2,61	0,4955	3,21	0,49934
0,22	0,0871	0,82	0,2939	1,42	0,4222	2,02	0,4783	2,62	0,4956	3,22	0,49936
0,23	0,0910	0,83	0,2967	1,43	0,4236	2,03	0,4788	2,63	0,4957	3,23	0,49938
0,24	0,0948	0,84	0,2995	1,44	0,4251	2,04	0,4793	2,64	0,4959	3,24	0,49940
0,25	0,0987	0,85	0,3023	1,45	0,4265	2,05	0,4798	2,65	0,4960	3,25	0,49942
0,26	0,1026	0,86	0,3051	1,46	0,4279	2,06	0,4803	2,66	0,4961	3,26	0,49944
0,27	0,1064	0,87	0,3078	1,47	0,4292	2,07	0,4808	2,67	0,4962	3,27	0,49946
0,28	0,1103	0,88	0,3106	1,48	0,4306	2,08	0,4812	2,68	0,4963	3,28	0,49948
0,29	0,1141	0,89	0,3133	1,49	0,4319	2,09	0,4817	2,69	0,4964	3,29	0,49950
0,30	0,1179	0,90	0,3159	1,50	0,4332	2,10	0,4821	2,70	0,4965	3,30	0,49952
0,31	0,1217	0,91	0,3186	1,51	0,4345	2,11	0,4826	2,71	0,4966	3,35	0,49960
0,32	0,1255	0,92	0,3212	1,52	0,4357	2,12	0,4830	2,72	0,4967	3,40	0,49966
0,33	0,1293	0,93	0,3238	1,53	0,4370	2,13	0,4834	2,73	0,4968	3,45	0,49972
0,34	0,1331	0,94	0,3264	1,54	0,4382	2,14	0,4838	2,74	0,4969	3,50	0,499767
0,35	0,1368	0,95	0,3289	1,55	0,4394	2,15	0,4842	2,75	0,4970	3,55	0,499807
0,36	0,1406	0,96	0,3315	1,56	0,4406	2,16	0,4846	2,76	0,4971	3,60	0,499841
0,37	0,1443	0,97	0,3340	1,57	0,4418	2,17	0,4850	2,77	0,4972	3,65	0,499869
0,38	0,1480	0,98	0,3365	1,58	0,4429	2,18	0,4854	2,78	0,4973	3,70	0,499892
0,39	0,1517	0,99	0,3389	1,59	0,4441	2,19	0,4857	2,79	0,4974	3,75	0,499912
0,40	0,1554	1,00	0,3413	1,60	0,4452	2,20	0,4861	2,80	0,49744	3,80	0,499928
0,41	0,1591	1,01	0,3438	1,61	0,4463	2,21	0,4864	2,81	0,49752	3,85	0,499941
0,42	0,1628	1,02	0,3461	1,62	0,4474	2,22	0,4868	2,82	0,49760	3,90	0,499952
0,43	0,1664	1,03	0,3485	1,63	0,4484	2,23	0,4871	2,83	0,49767	3,95	0,499961
0,44	0,1700	1,04	0,3508	1,64	0,4495	2,24	0,4875	2,84	0,49774	4,00	0,499968

0,45	0,1736	1,05	0,3531	1,65	0,4505	2,25	0,4878	2,85	0,49781	4,05	0,499974
0,46	0,1772	1,06	0,3554	1,66	0,4515	2,26	0,4881	2,86	0,49788	4,10	0,499979
0,47	0,1808	1,07	0,3577	1,67	0,4525	2,27	0,4884	2,87	0,49795	4,15	0,499983
0,48	0,1844	1,08	0,3599	1,68	0,4535	2,28	0,4887	2,88	0,49801	4,20	0,499987
0,49	0,1879	1,09	0,3621	1,69	0,4545	2,29	0,4890	2,89	0,49807	4,25	0,499989
0,50	0,1915	1,10	0,3643	1,70	0,4554	2,30	0,4893	2,90	0,49813	4,30	0,499991
0,51	0,1950	1,11	0,3665	1,71	0,4564	2,31	0,4896	2,91	0,49819	4,35	0,499993
0,52	0,1985	1,12	0,3686	1,72	0,4573	2,32	0,4898	2,92	0,49825	4,40	0,499995
0,53	0,2019	1,13	0,3708	1,73	0,4582	2,33	0,4901	2,93	0,49831	4,45	0,499996
0,54	0,2054	1,14	0,3729	1,74	0,4591	2,34	0,4904	2,94	0,49836	4,50	0,499997
0,55	0,2088	1,15	0,3749	1,75	0,4599	2,35	0,4906	2,95	0,49841	4,55	0,499997
0,56	0,2123	1,16	0,3770	1,76	0,4608	2,36	0,4909	2,96	0,49846	4,60	0,499998
0,57	0,2157	1,17	0,3790	1,77	0,4616	2,37	0,4911	2,97	0,49851	4,65	0,499998
0,58	0,2190	1,18	0,3810	1,78	0,4625	2,38	0,4913	2,98	0,49856	4,70	0,499999
0,59	0,2224	1,19	0,3830	1,79	0,4633	2,39	0,4916	2,99	0,49861	4,75	0,499999

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Приложение 2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Таблица значений $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$

Приложение 3

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004
8							0,00000	0,00000	0,00000

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,36787	0,13533	0,04978	0,01831	0,00673	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012
1	0,36787	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14652	0,08422	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499
3	0,06131	0,18044	0,22404	0,19536	0,14037	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19536	0,17546	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373
5	0,00306	0,03608	0,10081	0,15629	0,17546	0,16062	0,12771	0,09160	0,06072
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10419	0,14622	0,16062	0,14900	0,12213	0,09109
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444	0,13767	0,14900	0,13958	0,11711
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176
9	0,00000	0,00019	0,00270	0,01323	0,03626	0,06883	0,10140	0,12407	0,13175
10		0,00003	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07093	0,09926	0,11858
11		0,00000	0,00022	0,00192	0,00824	0,02252	0,04517	0,07219	0,09702
12		0,00000	0,00005	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04812	0,07276
13			0,00001	0,00019	0,00132	0,00519	0,01418	0,02961	0,05037
14			0,00000	0,00005	0,00047	0,00228	0,00709	0,01692	0,03238
15			0,00000	0,00001	0,00015	0,00057	0,00189	0,00426	0,00943
16				0,00000	0,00004	0,00034	0,00148	0,00451	0,01093
17				0,00000	0,00001	0,00018	0,00059	0,00212	0,00578
18					0,00000	0,00003	0,00023	0,00094	0,00289
19					0,00000	0,00001	0,00008	0,00039	0,00137
20						0,00000	0,00003	0,00015	0,00061
21						0,00000	0,00001	0,00006	0,00026
22							0,00000	0,00002	0,00010
23							0,00000	0,00000	0,00004

Таблица значений $\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Приложение 4

n	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,99532	0,98248	0,96306	0,93845	0,90980	0,87810	0,84420	0,80879	0,77248
2	0,99985	0,99885	0,99640	0,99207	0,98561	0,97688	0,96586	0,95258	0,93714
3	1,00000	0,99994	0,99973	0,99922	0,99825	0,99664	0,99425	0,99092	0,98654
4		1,00000	0,99998	0,99994	0,99983	0,99961	0,99921	0,99859	0,99766
5			1,00000	1,00000	0,99999	0,99996	0,99991	0,99982	0,99966
6					1,00000	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996
7							1,00000	1,00000	1,00000
8									1,00000

n	λ										
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002
1	0,73576	0,40601	0,19915	0,09158	0,04043	0,01735	0,00730	0,00302	0,00123	0,00050	0,00020
2	0,91970	0,67668	0,42319	0,23810	0,12465	0,06197	0,02964	0,01375	0,00623	0,00277	0,00121
3	0,98101	0,85712	0,64723	0,43347	0,26503	0,15120	0,08177	0,04238	0,02123	0,01034	0,00492
4	0,99634	0,94735	0,81526	0,62884	0,44049	0,28506	0,17299	0,09963	0,05496	0,02925	0,01510
5	0,99941	0,98344	0,91608	0,78513	0,61596	0,44568	0,30071	0,19124	0,11569	0,06709	0,03752
6	0,99992	0,99547	0,96649	0,88933	0,76218	0,60630	0,44971	0,31337	0,20678	0,13014	0,07861
7	0,99999	0,99890	0,98810	0,94887	0,86663	0,74398	0,59871	0,45296	0,32390	0,22022	0,14319
8	1,00000	0,99976	0,99620	0,97864	0,93191	0,84724	0,72909	0,59255	0,45565	0,33282	0,23199
9	1,00000	0,99995	0,99890	0,99187	0,96817	0,91608	0,83050	0,71662	0,58741	0,45793	0,34051
10		0,99999	0,99971	0,99716	0,98630	0,95738	0,90148	0,81589	0,70599	0,58304	0,45989
11		1,00000	0,99993	0,99908	0,99455	0,97991	0,94665	0,88808	0,80301	0,69678	0,57927
12		1,00000	0,99998	0,99973	0,99798	0,99117	0,97300	0,93620	0,87577	0,79156	0,68870
13			1,00000	0,99992	0,99930	0,99637	0,98719	0,96582	0,92615	0,86446	0,78129
14			1,00000	0,99998	0,99977	0,99860	0,99428	0,98274	0,95853	0,91654	0,85404
15			1,00000	1,00000	0,99993	0,99949	0,99759	0,99177	0,97796	0,95126	0,90740
16				1,00000	0,99998	0,99983	0,99904	0,99628	0,98889	0,97296	0,94408
17				1,00000	0,99999	0,99994	0,99964	0,99841	0,99468	0,98572	0,96781
18					1,00000	0,99998	0,99987	0,99935	0,99757	0,99281	0,98231
19					1,00000	0,99999	0,99996	0,99975	0,99894	0,99655	0,99071
20						1,00000	0,99999	0,99991	0,99956	0,99841	0,99533
21						1,00000	1,00000	0,99997	0,99983	0,99930	0,99775
22							1,00000	0,99999	0,99993	0,99970	0,99896
23							1,00000	1,00000	0,99998	0,99988	0,99954
24								1,00000	0,99999	0,99995	0,99980
25								1,00000	1,00000	0,99998	0,99992
26									1,00000	0,99999	0,99997
27									1,00000	1,00000	0,99999
28										1,00000	1,00000

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

Приложение 5

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

Приложение 6

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,38	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,3	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,29	636,6
2	2,920	4,30	6,96	9,92	22,33	31,6
3	2,353	3,18	4,54	5,84	10,21	12,9
4	2,132	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,015	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,943	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,895	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,860	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,833	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,812	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,796	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,782	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,771	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,761	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,753	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,746	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,740	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,734	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,729	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,725	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,721	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,717	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,714	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	1,711	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,708	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,706	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,703	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,701	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,699	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,697	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,684	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,671	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,658	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Критерий Колмогорова, значения функции λ_p :

$$p = P\{D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| > \lambda_p\}$$

n	p			n	p		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995	19	0,271	0,301	0,361
2	0,776	0,842	0,929	20	0,265	0,294	0,352
3	0,636	0,708	0,829	25	0,238	0,264	0,317
4	0,565	0,624	0,734	30	0,218	0,242	0,290
5	0,509	0,563	0,669	35	0,202	0,224	0,269
6	0,468	0,519	0,617	40	0,189	0,210	0,252
7	0,436	0,483	0,576	45	0,179	0,198	0,238
8	0,410	0,454	0,542	50	0,170	0,188	0,226
9	0,387	0,430	0,513	55	0,162	0,180	0,216
10	0,369	0,409	0,489	60	0,155	0,172	0,207
11	0,352	0,391	0,468	65	0,149	0,166	0,199
12	0,338	0,375	0,449	70	0,144	0,160	0,192
13	0,325	0,361	0,432	75	0,139	0,154	0,185
14	0,314	0,349	0,418	80	0,135	0,150	0,179
15	0,304	0,338	0,404	85	0,131	0,145	0,174
16	0,295	0,327	0,392	90	0,127	0,141	0,169
17	0,286	0,318	0,381	95	0,124	0,137	0,165
18	0,279	0,309	0,371	100	0,121	0,134	0,161