Повторные независимые испытания. Теорема Бернулли

Задача 1. Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».
Решение. Шестикратное бросание кости можно рассматривать как последовательность независимых испытаний с вероятностью успеха («шестерки»), равной 1/6, и вероятностью неудачи — 5/6. Искомую вероятность вычисляем по формуле $P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}053$.

Задача 2. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более, чем 2 раза.
Решение. Искомая вероятность равна сумме вероятностей трех событий, состоящих в том, что герб не выпадет ни разу, либо один раз, либо два раза:

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}344.$$

Задача 3. Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.
Решение. Событие состоит в том, что из 4 фирм-нарушителей будет выявлено три или четыре, т.е.
$$P(A) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 + C_4^4 0{,}9^4 = 0{,}9^3(0{,}4 + 0{,}9) = 0{,}9477.$$

Задача 4. Монета подбрасывается 3 раза. Найти наиболее вероятное число успехов (выпадений герба).
Решение. Возможными значениями для числа успехов в трех рассматриваемых испытаниях являются m = 0, 1, 2 или 3. Пусть A_m - событие, состоящее в том, что при трех подбрасываниях монеты герб появляется m раз. По формуле Бернулли легко найти вероятности событий A_m (см. таблицу):

m	0	1	2	3
$P_n(m)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Из этой таблицы видно, что наиболее вероятными значениями являются числа 1 и 2 (их вероятности равны 3/8). Этот же результат можно получить и из теоремы 2. Действительно, n=3, p=1/2, q=1/2. Тогда
$3\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \le m^* \le 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, т.е. $1 \le m^* \le 2$.

Задача 5. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наивероятнейшее число заключенных договоров после 25 визитов.
Решение. Имеем n=10, p=0,1, q=0,9. Неравенство для наиболее вероятного числа успехов принимает вид: $25\cdot0{,}1-0{,}9 \le m^* \le 25\cdot0{,}1+0{,}1$ или $1{,}6 \le m^* \le 2{,}6$. У этого неравенства только одно целое решение, а именно, $m^*=2$.

Задача 6. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?
Решение. Имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p=0,005. Применяя пуассоновское приближение с $\lambda=np=5$, получаем

1) $P_{1000}(3) \approx \frac{5^3}{3!} e^{-5}$;

2) $P_{1000}(m \geq 3) = 1 - P_{1000}(m<3) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx 1 - \sum_{m=0}^{2} \frac{5^m}{m!} e^{-5}$,

и $P_{1000}(3) \approx 0{,}14$; $P_{1000}(m \geq 3) \approx 0{,}875$.

Задача 7. Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p=0,75. Найти вероятность того, что при 100 посещениях клиент совершит покупку ровно 80 раз.
Решение. В данном случае n=100, m=80, p=0,75, q=0,25. Находим $x = \frac{80 - 100 \times 0{,}75}{\sqrt{100 \times 0{,}75 \times 0{,}25}} = 1{,}16$, и определяем φ(x)=0,2036, тогда искомая вероятность равна $P_{100}(80) = \frac{0{,}2036}{\sqrt{100 \times 0{,}75 \times 0{,}25}} = 0{,}047$.

Задача 8. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.
Решение. По условию задачи n=40000, p=0,02. Находим np=800, $\sqrt{npq} = 28$. Для вычисления P(m≤870) воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:
$P(0<m\leq 870) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$, где $x_1 = \frac{0 - 800}{28} = -28{,}57$ и $x_2 = \frac{870 - 800}{28} = 2{,}5$.

Находим по таблице значений функции Лапласа:
$P(0<m\leq 870) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) = \Phi_0(2{,}5) - \Phi_0(-28{,}57) = 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938$.

Задача 9. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превышала ε.
Решение. По условию задачи p=0,8, n=400. Используем следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 0{,}99 = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. Следовательно, $\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}495$. По таблице для функции Лапласа определяем $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2{,}58$. Отсюда ε=0,0516.

Задача 10. Курс акции за день может подняться на 1 пункт с вероятностью 50%, опуститься на 1 пункт с вероятностью 30% и остаться неизменным с вероятностью 20%. Найти вероятность того, что за 5 дней торгов курс поднимется на 2 пункта.
Решение. Возможны только следующие два варианта развития событий:
1) курс растет 2 дня, ни разу не падает, не меняется 3 дня;
2) курс растет 3 дня, падает 1 день, не меняется 1 день.
Таким образом,

$$P(A) = P_5(2,0,3) + P_5(3,1,1) = \frac{5!}{2!0!3!} 0{,}5^2 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}2^3 + \frac{5!}{3!1!1!} 0{,}5^3 \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}02 + 0{,}15 = 0{,}17.$$