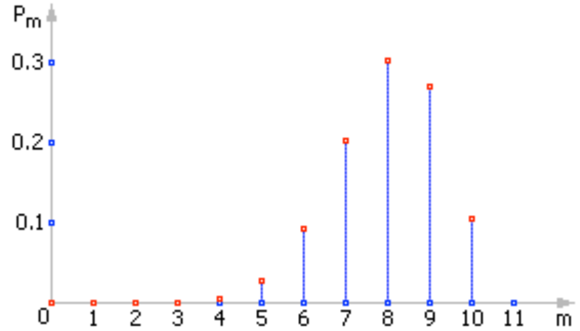
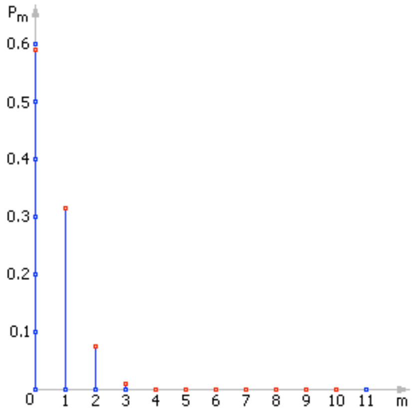
ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН



(p=0,8; n=10)

Бернулли

$$P(x=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$



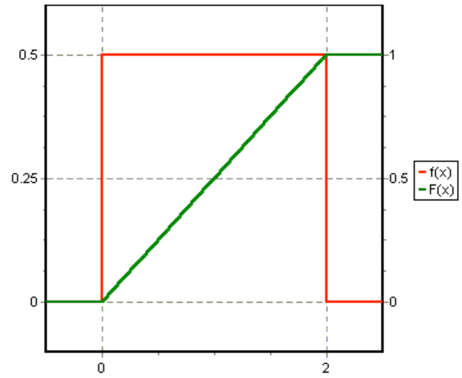
$(\lambda = 0{,}5)$

Пуассона

$$P(x=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

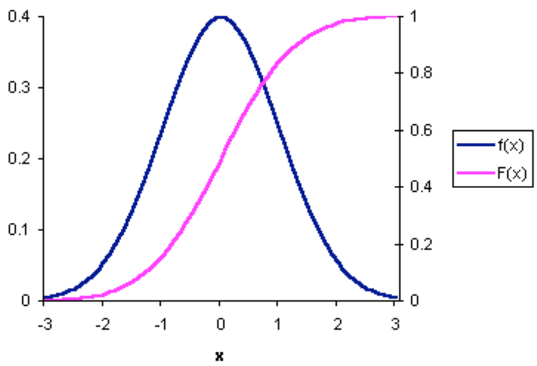
Равномерный

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b;\\ 0, x>b.\end{cases}$$



Нормальный

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Величины, которые могут принять в результате опыта любое из возможных значений, являются предметом дальнейшего изучения. *Случайной* называется *величина*, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное. *Непрерывной случайной величиной* называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Пример 1. Примерами дискретной случайной величины являются: число бракованных изделий в случайно отобранной партии из *n*-изделий; число солнечных дней в году; число учеников, опрошенных на уроке в школе.

Примерами непрерывной случайной величины служат: время безаварийной работы станка; расход горючего на единицу расстояния; количество осадков, выпавших за сутки.

Однако простое перечисление всех возможных значений случайной величины не дает достаточно полного представления о ней. Кроме того, необходимо знать, как часто могут появляться те или иные значения в результате испытаний или наблюдений, т.е. следует знать вероятности их появления. Полное представление о случайной величине может дать закон ее распределения.

Законы распределения дискретных случайных величин

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчиняется данному закону распределения.

При табличном способе задания закона распределения первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания), а вторая – соответствующие вероятности ($\sum p_i = 1$):

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Дискретная случайная величина имеет ***биномиальный закон распределения*** *(закон распределения Бернулли)*, если она принимает целочисленные неотрицательные значения 0, 1, 2, 3, …, *m, ..., n* с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли:

x_i	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\cdots$	p^n

где $q = 1 - p;\quad C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - число сочетаний из *n* элементов по *m*.

Пример 2. На некотором участке дороги 60% водителей соблюдают предусмотренный правилами скоростной режим. Составить закон распределения числа водителей, соблюдающих установленные ограничения по скорости, из пяти проехавших.

Случайная величина *X* – число водителей, соблюдающих установленные ограничения по скорости из пяти проехавших. В $n = 5$ независимых испытаниях вероятность того, что скоростной режим не нарушен, по условию постоянна и равна: $p = 0{,}6$. Следовательно, вероятность нарушения: $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Тогда биномиальный закон распределения числа водителей имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

Дискретная случайная величина имеет ***закон распределения Пуассона*** с параметром $\lambda = np$, если она принимает целочисленные неотрицательные значения 0, 1, 2, 3, …, *m,* ... с вероятностями, вычисляемыми по формуле Пуассона. Т. к. вероятность наступления события в каждом испытании мала (при $n \to \infty, p \to 0$), закон распределения Пуассона еще называют законом редких событий.

x_i	0	1	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Пример 3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,015. Сделано 600 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий в цель не меньше 7 и не большее 10?

В данном случае $\lambda = 600 \cdot 0{,}015 = 9$. Предполагая закон распределения Пуассона, имеем:

x_i	7	8	9	10
p_i	0,1171	0,1318	0,1318	0,1186

Следовательно, $P(7 \le X \le 10) = 0{,}4993$.

Законы распределения непрерывных случайных величин

Закон распределения непрерывной случайной величины нельзя задать также, как для дискретной. Он неприменим в силу того, что нельзя перечислить все бесконечное несчетное множество значений, а вероятности каждого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равны нулю.

Для описания закона распределения непрерывной случайной величины *X* предлагается другой подход: рассматривать не вероятности событий *X=x* для разных *x*, а вероятности события *X*<*x*. При этом вероятность *P(X*<*x)* зависит от текущей переменной, т. е. является некоторой функцией от *x*.

Функцией распределения случайной величины *X* называется функция *F(x)*, выражающая для каждого *x* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньшее *x*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию *F(x)* называют *интегральной функцией распределения* или интегральным законом распределения.

Способ задания непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным. Необходимо определить некоторую функцию, отражающую вероятности попадания случайной точки в различные участки области возможных значений непрерывной случайной величины. Т. е. представить некоторую замену вероятностям p_i для дискретной случайной величины в непрерывном случае.

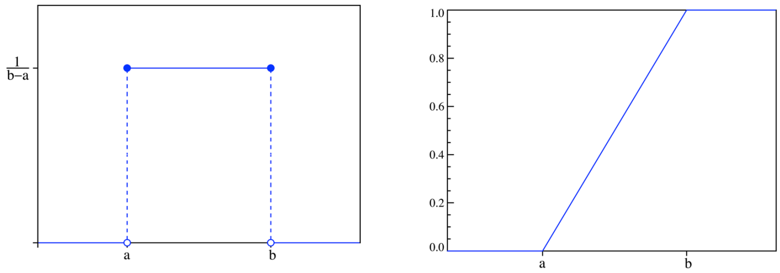
Такой функцией является плотность распределения вероятностей. *Плотностью вероятности* (*плотностью распределения, дифференциальной функцией*) случайной величины *X* называется функция *f(x),* являющаяся первой производной интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Про случайную величину *X* говорят, что она имеет распределение (распределена) с плотностью *f(x)* на определенном участке оси абсцисс.

Равномерный закон распределения. Непрерывная случайная величину *X* имеет равномерный закон распределения (закон постоянной плотности) на отрезке [*a; b*], если на этом отрезке функция плотности вероятности случайной величины постоянна, т.е. *f(x)* имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b;\\ 0, x>b.\end{cases}$$



Функция плотности вероятности f(x) *Функция распределения F(x)*

Рис.1. Равномерный закон распределения

Пример 4. Время ожидания ответа на телефонный звонок – случайная величина, подчиняющаяся равномерному закону распределения в интервале от 0 до 2 минут. Найти интегральную и дифференциальную функции распределения этой случайной величины.

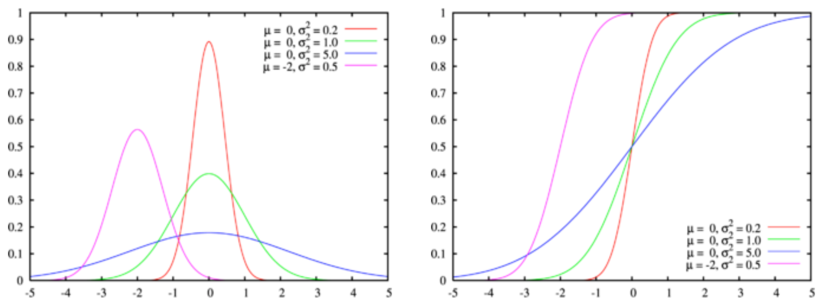
$$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}, 0\le x\le 2;\\ 0, x>2.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{x}{2}, 0\le x\le 2;\\ 1, x>2.\end{cases}$$

Нормальный закон распределения *(закон Гаусса).* Непрерывная случайная величина *X* имеет нормальный закон распределения с параметрами μ и σ^2 (обозначают $X\subset N(\mu;\sigma^2)$), если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\mu=M(X)$,

$\sigma^2=D(X)$.



Функция плотности вероятности f(x) *Функция распределения F(x)*

Рис.2. Нормальный закон распределения

Математическое ожидание характеризует центр рассеивания значений случайной величины и при изменении μ кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс (см. рис. 2 при $\mu=0$ и при $\mu=-2$). Если же при неизменном математическом ожидании у случайной величины изменяется дисперсия, то кривая будет изменять свою форму, сжимаясь или растягиваясь (см. рис. 2 при $\mu=0$: $\sigma^2=0{,}2$; $\sigma^2=1{,}0$; $\sigma^2=5{,}0$). Таким образом, параметр μ характеризует положение, а параметр σ^2 - форму кривой плотности вероятности.

Нормальный закон распределения случайной величины X с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ (обозначается $N(0;1)$) называется *стандартным* или *нормированным,* а соответствующая нормальная кривая – стандартной или нормированной.

Согласно определению функция плотности вероятности и функция распределения связаны между собой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{где } t = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Интеграл такого рода является "неберущимся", поэтому для его нахождения используют особую функцию, так называемый *интеграл вероятностей* или *функцию Лапласа*, для которой составлены таблицы (см. Приложение 2).

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$\Phi(-t) = -\Phi(t)$ - функция нечетная!

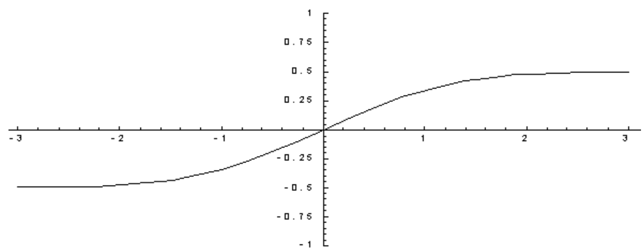


Рис. 3. Функция Лапласа Φ(t)

Используя функцию Лапласа можно выразить функцию распределения нормального закона по формуле:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi(t), \quad \text{где } t = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Для практических целей очень важны *свойства* случайной величины, имеющей нормальный закон распределения.

1. Если $X \subset N(\mu;\sigma^2)$, то для нахождения вероятности попадания этой величины в заданный интервал $(x_1;x_2)$ используется формула:

$$P(x_1 \le X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

2. Вероятность того, что отклонение случайной величины $X \subset N(\mu;\sigma^2)$ от ее математического ожидания μ не превысит величину $\delta > 0$ (по абсолютной величине), равна:

$$P\left(|X - \mu| \le \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

3. *"Правило трех сигм"*. Если случайная величина $X \subset N(\mu;\sigma^2)$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$. (Вероятность выхода за эти границы составляет 0,0027.) Правило позволяет, зная параметры (σ и μ), ориентировочно определить интервал практических значений случайной величины.

Пример 5. Случайная величина распределена нормально с параметрами $\mu = 8$, $\sigma = 3$. Найти вероятность того, что случайная величина в результате опыта примет значение, заключенное в интервале (12,5; 14).

$$P(12{,}5 \le X < 14) = \Phi\left(\frac{14-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{12{,}5-8}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(1{,}5) = 0{,}4772 - 0{,}4332 = 0{,}044.$$

Пример 6. Случайная погрешность измерения подчинена нормальному закону распределения с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 9$. Проводятся три независимых измерения. Найти вероятность того, что погрешность хотя бы одного измерения не превосходит по абсолютной величине 3 мм.

Вероятность того, что погрешность измерения в одном испытании не превышает 3 мм:

$$P(|X - 0| \le 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{9}\right) = 2\Phi(0,33) = 2 \cdot 0,1293 = 0,2586.$$

Вероятность того, что эта погрешность измерения в одном испытании превышает 3 мм, равна:

$$P(|X| > 3) = 1 - P(|X| < 3) = 1 - 0,2586 = 0,7414.$$

Вероятность того, что во всех трех испытаниях погрешность измерения превышает 3 мм:

$$P(\overline{A}) = P(|X| > 3)^3 = 0,4075.$$

Искомая вероятность: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,4075 = 0,5925.$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

Задача 2. Случайная величина Z подчиняется стандартному нормальному закону распределения. Найти вероятность попадания Z в интервалы: *а*) от 2 до 3; *б*) менее 2,1.

Задача 3. Производится измерение диаметра вала, в результате которого выявлено отсутствие систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 10 *мкм*. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 *мкм*.

Задача 4. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 *мм*. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением равным 0,4 *мм*, найти, сколько будет бракованных шариков среди ста изготовленных.

Задача 5. Автомат штампует детали, заданный размер которых составляет 50 *мм*. После контроля длины деталей X было выявлено, что фактически длина изготовленных деталей не менее 32 *мм* и не более 68 *мм*. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: *а*) больше 55 *мм*; *б*) меньше 40 *мм*.

Задача 6. Случайная величина $X \subset N(120;44^2)$. Найти такое значение x, при котором $P(X < x) = 0,56$.

Задача 7. Пьер работает в пункте по обмену валюты в офисе аэропорта Орли в Париже. Его пункт открыт ночью, когда банк аэропорта закрыт, и он делает в основном свой бизнес на возвращающихся в Америку туристах, которые хотят обменять евро на доллары. Из опыта Пьер знает, что потребность в долларах в любую ночь подчиняется нормальному закону распределения со средней 25000$ и средним квадратическим отклонением, равным 5000$. Если Пьер сохраняет много наличности, то он должен платить штраф (% за наличность). Если денег не хватает, то он должен посылать человека в круглосуточное отделение банка за получением наличности, а это дополнительные расходы. Пьер хотел бы иметь в течение ночи такую сумму денег, чтобы с уверенностью в 85% покрывать требующуюся на ночь сумму валюты. Определить требуемую сумму долларов.